UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR
Ciências

# Trigonometria
## Passado, Presente e Futuro

**Maria Cristina Fernandes Martins**

Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em
**Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário**
(2º ciclo de estudos)

Orientadora: Prof.ª Doutora Sandra Bento

**Covilhã, junho de 2014**

# Dedicatória

*Ao meu Pai...*

# Agradecimentos

Agradeço às minhas orientadoras, a Professora Maria Isaura Mendes e à Professora Doutora Sandra Bento, pelas observações, comentários e sugestões, pela paciência, dedicação, disponibilidade e atenção que sempre manifestaram ao longo deste ano letivo.

À Direção Pedagógica da Escola Secundária Campos Melo pela disponibilidade em me acolher na escola e por me possibilitarem a realização desta experiência.

Aos meus amigos, pela amizade e carinho por me terem sempre apoiado e por principalmente terem acreditado sempre em mim. Obrigada a TODOS!

Ao Alex, pela dedicação, por todas as palavras de incentivo... enfim por tudo, tudo mesmo...

A toda a minha família, pelo carinho, apoio e incentivo demonstrado desde o início deste mestrado.

Aqueles que diretamente ou indiretamente me ajudaram na realização deste trabalho.

# Resumo

Este trabalho encontra-se dividido em duas partes: pesquisa científica e prática de ensino supervisionada.

No trabalho científico fez-se uma investigação sobre os povos que contribuíram para a descoberta e evolução da trigonometria. Recorda-se a terminologia, o conceito de círculo trigonométrico e a transição das razões trigonométricas para as funções trigonométricas. Com o desenvolvimento da trigonometria surgiram identidades trigonométricas fundamentais neste ramo da matemática, e que hoje são imprescindíveis em várias outras áreas. Identidades que serão enunciadas e demonstradas neste trabalho, nomeadamente, o teorema de Ptolomeu, fórmula fundamental da trigonometria, fórmulas do seno e cosseno da soma e da diferença, lei dos senos e dos cossenos. É feita uma contextualização do ensino da trigonometria no ensino básico e secundário e são ainda apresentados dois exemplos da aplicabilidade da trigonometria que foram objeto de pesquisa nas disciplinas de Seminário de Investigação Matemática. A encerrar esta parte é feita uma análise de uma nova abordagem sobre a trigonometria, chamada de Trigonometria Racional.

Relativamente à prática de ensino supervisionada é feita uma descrição sumária do que foi realizado no estágio pedagógico. É apresentado um conjunto de 6 planificações que correspondem a aulas lecionadas, no 9º e 12º ano de escolaridade.

# Palavras-chave

Trigonometria, Trigonometria Racional, Triângulo Retângulo, Círculo Trigonométrico, Teorema de Ptolomeu, Lei dos Senos, Lei dos Cossenos

# Abstract

This project is divided into two parts, the scientific research and the supervised teaching practice.

The scientific research part started with a short list of the historical contributions to the discovery and evolution of trigonometry, recalling the terminology, the concept of trigonometric circle and the transition of trigonometric ratios to trigonometric functions. With the development of trigonometry, many fundamental trigonometric identities emerged in this field of mathematics, being essential in many other areas. These identities will be stated and demonstrated in this project, including the Ptolemy method, the trigonometric fundamental formula, the sum and subtraction formulas and the sine and cosine law. A contextualization of trigonometry teaching in Junior High and High Schools is also presented, along with two examples of the applicability of trigonometry which were object of research throughout the subjects of a Seminar on Mathematical Research. Concluding this part, a brief analysis of a new approach on trigonometry, called Rational Trigonometry, is done, too.

Regarding the supervised teaching practice, a brief description of what was performed during pedagogical training is produced, presenting a set of 6 lesson plans which correspond to lessons taught in the 9th and 12th grades.

# Keywords

Trigonometry, Rational Trigonometry, Right Triangle, Trigonometric Circle, Ptolemy Method, Sine Law, Cosine Law

# Conteúdo

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Capítulo 1

# Introdução

Trigonometria, palavra de origem grega, que pode ser decomposta em *trigonos* (triângulo) + *metreo* (medida), ou seja, significa medida de triângulos. Por ser uma área da matemática de grande relevância no ensino básico e secundário foi o tema escolhido para aprofundar cientificamente nos Seminários e com isso apresentar neste relatório um estudo da sua história, aplicações e perspetivas de futuro. Historicamente, as funções trigonométricas surgiram para dar resposta a problemas matemáticos de situações reais, nomeadamente na astronomia, navegação, agrimensura,... Atualmente a trigonometria continua a ser muito importante no desenvolvimento de várias áreas científicas, como por exemplo a mecânica e a topografia.

Este relatório inicia-se com uma pequena investigação sobre os registos que os nossos antepassados nos foram deixando relativamente ao desenvolvimento e evolução da história da trigonometria. Os gregos, os árabes, os hindus, os babilônicos, todos deixaram o seu contributo para a trigonometria que conhecemos hoje. Desde o século IV a.C. o Homem mostrou sensibilidade e curiosidade em estudar as relações entre os ângulos num círculo e os comprimentos das suas cordas. Como a mente inquieta do ser humano nunca está satisfeita, este procura sempre ir mais longe e saber mais.

A matemática como qualquer área do saber, tem a sua própria linguagem. Apenas se consegue comunicar corretamente se o emissor e receptor conhecerem o código, assim numa segunda fase deste trabalho é apresentada a terminologia fundamental sobre a trigonometria.

Quando se fala em trigonometria a primeira coisa que o nosso pensamento constrói é uma imagem do triângulo retângulo, pois é sobre esta figura geométrica que se inicia o estudo deste tema no ensino básico. Seguidamente e muito provavelmente pensaremos nas razões trigonométricas: seno, cosseno, tangente. Se nos concentramos mais um pouco lembramo-nos que em certa altura do nosso percurso escolar falávamos em círculo trigonométrico, e à medida que nós próprios íamos crescendo e avançando no ensino também os nossos conhecimentos de trigonometria se iam desenvolvendo e relacionando com outros conceitos. Também neste trabalho será feita uma abordagem evolutiva da trigonometria e será analisada a estrutura do programa relativamente a este tema.

Ao longo da história da trigonometria, foram deixados contributos que ainda hoje permanecem e são de extrema importância. Assim será feita referência a algumas identidades trigonométricas, nomeadamente, ao teorema de Ptolomeu, à fórmula fundamental da trigonometria, às fórmulas do seno e cosseno da soma e da diferença de ângulos, a lei dos senos e dos cossenos.

Para que se entenda a importância da trigonometria e onde pode ser aplicada no dia-a-dia é apresentado um exemplo de aplicação da trigonometria na natureza, intitulado "Observar golfinhos... com trigonometria", dos autores Pedro Duarte, Telmo Peixe e Teresa Caissotti que se encontra publicado na Gazeta da Matemática nº169. É ainda apresentado um outro exemplo de aplicação envolvendo figuras geométricas simples, que visa estudar polígonos regulares com área e o perímetro racionais, pois muitas vezes quando trabalhamos com as razões trigonométricas obtemos números irracionais.

Porque trabalhar com número irracionais pode dar origem a cálculos aproximados pouco rigorosos, um professor australiano de seu nome Wildberger sugere uma nova teoria para a trigonometria. Esta abordagem defende que outras medidas de triângulos podem ser equacionadas com relações polinomiais que produzem resultados racionais mais fáceis de compreender. Segundo este autor os cálculos serão mais belos e simples. Assim, neste relatório será feita uma abordagem superficial aquilo que Wildberger intitula de Trigonometria Racional.

Por último será feita uma descrição sumária do que foi a prática de ensino supervisionada. É feita uma contextualização de onde esta foi feita, quais as atividades desenvolvidas, e são apresentadas as planificações que achei mais pertinentes e que fossem de encontro ao tema deste relatório.

# Capítulo 2

# Trigonometria

Desde os tempos primórdios, o homem teve curiosidade sobre o mundo que o rodeia, e consequentemente sobre os objetos que se encontram à sua volta.

Fazer medições, determinar alturas, efetuar cálculos sempre fez parte da vida do ser humano. Assim, a matemática entrelaça-se com a "história do homem/ civilizações". A curiosidade e a mente inquieta do Homem impulsionou-o a novas e diversas descobertas. Deste modo a necessidade de "conhecer os céus", levou ao estudo e ao desenvolvimento de métodos que dessem resposta a problemas relacionados com a Astronomia, Agrimensura e Navegações.

## 2.1 Um pouco de história

Vários povos contribuíram para as descobertas que levaram ao desenvolvimento da trigonometria, nomeadamente os gregos, os árabes, os hindus e os babilônios.

A palavra trigonometria tem origem grega e relaciona-se com as medidas de um triângulo. É uma área da geometria que estuda as relações entre os lados e os ângulos do triângulo. [15]

Os primeiros conceitos de Trigonometria remontam aos egípcios e aos babilónicos, por volta do século IV e V a.C.. Os gregos foram os primeiros a efetuar um estudo das relações entre os ângulos num círculo e os comprimentos das suas cordas. [2]

Através do Papiro Ahmes, mais conhecido como Papiro Rhind, que data de 1650 a.C., surgem os primeiros vestígios do estudo da trigonometria e as primeiras referências à semelhança de triângulos. [2]

Os egípcios, mestres na construção de pirâmides tinham como preocupação principal manter uma inclinação constante das faces. Assim, surgiu a palavra *seqt* que segundo Boyer significava "*o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura. O seqt correspondia assim ao termo hoje usado pelos arquitetos para indicar a inclinação de uma parede*". Presume-se que o conceito *seqt* de uma pirâmide regular seja equivalente ao conceito de cotangente de um ângulo nos dias de hoje. [2] [6]

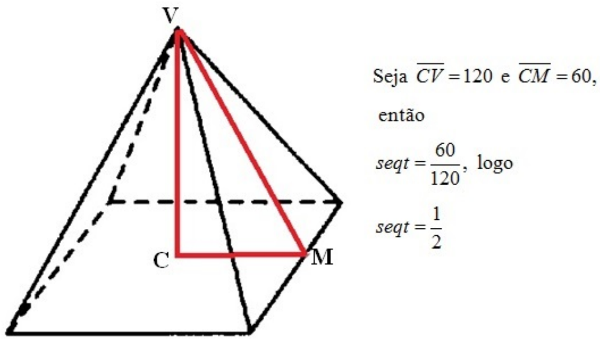



Figura 2.1: O seqt egípcio

Para além das medições das pirâmides, relacionavam também as horas do dia com a sombra de um gnómon. O gnómon era uma vara que se espetava no chão, perpendicular a este, e o comprimento da sua sombra era observado a uma determinada hora do dia.

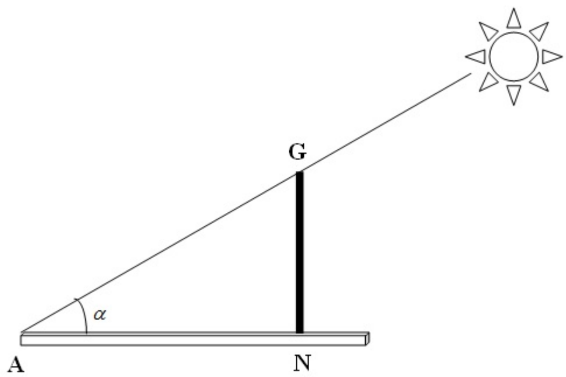



Figura 2.2: O Gnômon

Como o tamanho do gnômon era constante, possivelmente usariam sempre a mesma vara, na mesma posição, o comprimento de NA ao meio dia variava com o ângulo Â, ou seja $\frac{AN}{GN}$ seria a "função" do ângulo A, também hoje designada de cotangente. [6]

É importante referir que Thales de Mileto e Pitágoras, também contribuíram notoriamente no desenvolvimento da trigonometria. O primeiro com os seus estudos de semelhança de triângulos e o segundo formalizou o teorema que tem o seu nome: "O quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos", que mais tarde contribuiu para estabelecer a fórmula fundamental de trigonometria.

A curiosidade estimulou os astrónomos gregos a calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e também sobre o raio da terra. Deve-se a Eratóstenes de Cirene a descoberta da medida para a circunferência da Terra, através da semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que o levou a perceber a existência de relações entre ângulos e cordas.

No entanto, citando Boyer podemos afirmar que: *"Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Eratóstenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática".* [2]

Na segunda metade do século II a.C., Hiparco de Nicéia adotou a base 60 para contagem e dividiu a circunferência em 360 partes iguais. A cada parte em que a circunferência ficou dividida atribuiu-lhe o nome de arco de um grau. Pegando nesse arco voltou-o a dividir em 60 partes iguais, designando cada parte por arco de um minuto. Os estudos de Hiparco conduziram-no à relação entre o comprimento de um arco e o ângulo ao centro correspondente de um círculo arbitrário. Supõe-se que tenha sido ele também, a construir a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos de $0^\circ$ a $180^\circ$. Todas estas descobertas e avanços na astronomia conferiram-lhe o título de "Pai da Trigonometria". [2]

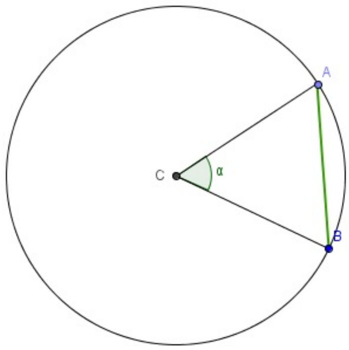



Figura 2.3: A corda de $\alpha$

Anos mais tarde surgiu Cláudio Ptolomeu, autor da obra *"Syntaxis Matemática"*, composta por 13 volumes, que ficou conhecida como o Almagesto ("o maior"), onde relacionou o comprimento da corda com o arco. No Almagesto, Ptolomeu inclui tabelas mais completas que as de Hiparco, com ângulos de meio em meio grau, de $0^\circ$ a $180^\circ$ e o Teorema de Ptolomeu que foi de extrema importância para o cálculo das cordas de Ptolomeu. A partir deste resultado, chegou, ao que chamamos hoje de fórmulas do cosseno e do seno da soma e da diferença de dois ângulos.*"Foi a fórmula para seno da diferença – ou, mais precisamente, corda da diferença – que Ptolomeu achou especialmente útil ao construir suas tabelas."* [2] [5]

Aproximadamente em 400 a.C. os hindus desenvolveram um conjunto de textos matemáticos com o nome de *"Surya Sidhanta"*. Estes textos usavam a relação entre metade da corda e a metade do ângulo ao centro, que designavam por *jiva*. A *jiva* corresponde atualmente ao seno. [6]

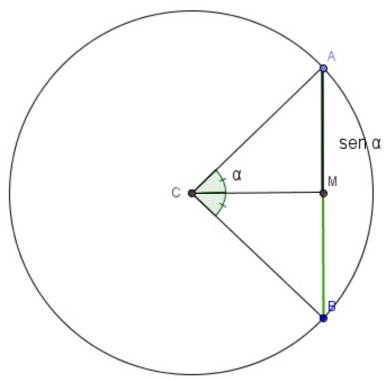



Figura 2.4: Relação entre metade da corda e a metade do ângulo ao centro.

Desde muito cedo os povos antigos utilizaram as razões trigonométricas e fizeram cálculos com elas, no entanto apenas no século XVII, é que surge a palavra cosseno como sendo o seno do complemento de um ângulo. Recordamos que ângulos complementares são ângulos cuja soma corresponde a $90^\circ$.

Com Thomas Fincke, em 1583 surge o conceito de tangente. Mais tarde em 1620, Edmund Gunter foi o primeiro a usar o conceito de cotangente. Estes conceitos desempenharam um papel fundamental na construção de relógios de sol, permitindo calcular o comprimento da sombra produzida por um objeto.

Por sua vez Euler através de uma das suas obras que data de 1748, estabeleceu o tratamento estritamente analítico das funções trigonométricas. Euler usou o círculo trigonométrico de raio unitário e introduziu os conceitos de seno, cosseno e tangente como números, ou uma razão ou coordenadas de um ponto no plano, fazendo a transição das razões trigonométricas para funções trigonométricas. [6] [10]

Com as investigações de Jean Baptiste Fourier surgem as séries de Fourier, que são funções periódicas definidas a partir das funções seno e cosseno. Muitos dos fenómenos físicos e sociais que apresentam um comportamento cíclico podem ser modelados usando funções trigonométricas. Deste modo, a trigonometria é de extrema relevância no estudo da astronomia, engenharia, medicina, etc... São exemplos de funções periódicas as fases da lua, o movimento das marés, o ciclo menstrual das mulheres, movimento de um pêndulo, rotação da terra (ciclo dia e noite).

O conhecimento da evolução e da utilização da trigonometria, facilita o processo de ensino-aprendizagem, pois permite aos alunos relacionar melhor os conceitos, fazer analogias e encontrar aplicações na resolução de problemas do quotidiano.

## 2.2 Terminologia|Nomenclatura

*"A utilização das regras de nomenclatura permitiu uniformizar os nomes das categorias taxonómicas, facilitando a comunicação científica, uma vez que estes nomes passaram a ser os mesmos no mundo inteiro - nomenclatura internacional."* Esta é a definição que pode ser lida no dicionário online Priberam. Deste modo, uma ciência tão poderosa como a Matemática também possuí a sua própria nomenclatura.

Os hindus tinham dado o nome de jiva à metade da corda, e por sua vez os árabes designaram-na por jiba. Com as diversas traduções chegou até nós o termo *"seno"*. [2]
A partir do seno foi possível construir todas as outras razões trigonométricas. Ao longo dos tempos, os conhecimentos desenvolvem-se e evoluem conforme a necessidade. Assim surge a noção de cosseno - o seno do complemento.

A palavra Trigonometria foi criada por Bartholomeo Pitiscus, que publicou o livro com o título: "Trigonometriar Sive de Solutions triangulorum Tractaus Brevis et Perspicuns". [2]

Para o estudo do triângulo retângulo, foi necessário estabelecer nomes para os diferentes lados do triângulo, de modo a facilitar a comunicação e para que as anotações fossem entendidas por todos. Apesar de todos já estarmos familiarizados com estes nomes, nunca é demais relembrar que os três lados de um triângulo retângulo, dado um ângulo agudo $\eta$ são: Hipotenusa; Cateto Oposto e Cateto Adjacente.

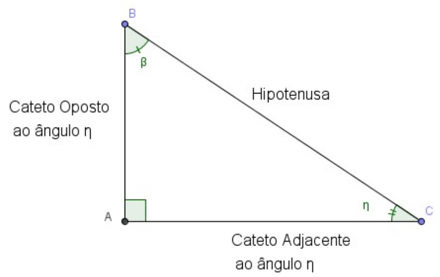



Figura 2.5: Nomenclatura do triângulo retângulo associado ao ângulo $\eta$

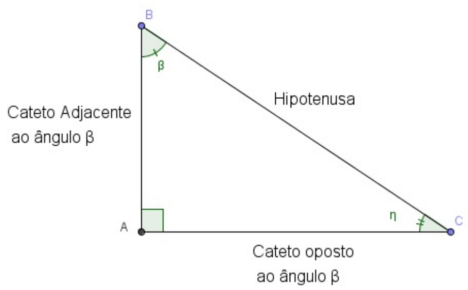



Figura 2.6: Nomenclatura do triângulo retângulo associado ao ângulo $\beta$

Pode-se observar que a nomenclatura dos catetos do triângulo retângulo está diretamente ligada à escolha de um ângulo agudo determinado. Seja $\eta$ uma ângulo agudo interno de um triângulo retângulo, tem-se que:

$$sen\,\eta = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ da\ hipotenusa} \qquad cos\,\eta = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente}{medida\ da\ hipotenusa}$$

Estas relações definem o seno e o cosseno de um ângulo agudo qualquer. A construção do seno e do cosseno estão relacionadas. O cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do seu complemento. Sabemos também que um triângulo retângulo tem obrigatoriamente um ângulo reto ($90\,^\circ$), e os dois outros ângulos são agudos, uma vez que a soma da amplitude dos três ângulos internos de um triângulo é de $180\,^\circ$. Como um dos ângulos já tem de amplitude $90\,^\circ$, então a soma da amplitude dos outros dois ângulos tem de ser de $90\,^\circ$. Assim, $\eta + \beta = 90\,^\circ$, $\eta$ e $\beta$ são complementares e

$$sen\,\eta = cos\,\beta \qquad e \qquad sen\,\beta = cos\,\eta$$

A tangente é a razão entre o seno e o cosseno, assim:

$$\frac{sen\,\eta}{cos\,\eta} = \frac{\frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ da\ hipotenusa}}{\frac{medida\ do\ cateto\ adjacente}{medida\ da\ hipotenusa}} = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ do\ cateto\ adjacente} = tan\,\eta$$

## 2.3 Círculo Trigonométrico

Na evolução do estudo da Trigonometria, Leonard Euler observou que, o seno podia deixar de ser vista apenas como uma medida de um segmento de reta e introduziu a ideia de que o seno podia ser um número, uma razão ou uma ordenada de um ponto no círculo. Assim, o seno seria uma função do arco duma circunferência de raio unitário, que limita o círculo trigonométrico.

A medida dos ângulos em radianos é essencial na trigonometria. As duas unidades mais usadas para medir amplitudes de ângulos e de arcos de circunferência são o grau e o radiano. O grau é a unidade mais antiga. O radiano é a amplitude de um arco de circunferência cujo comprimento é igual ao raio da circunferência. Na figura 2.7, o arco AB tem comprimento igual ao raio CB, por

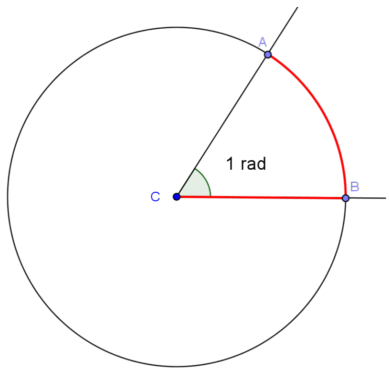



Figura 2.7: Radiano

isso, a amplitude do arco AB é 1 radiano. O ângulo ao centro correspondente tem amplitude igual à do arco, assim a sua amplitude também é 1 radiano.

É importante ter presente a relação que existem entre graus e radianos. $\pi$ é o quociente entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Portanto, para obter o comprimento de uma circunferência, multiplicamos o raio por $2\pi$. Como o arco cuja amplitude é um radiano tem comprimento igual ao raio, temos de multiplicar o comprimento desse arco por $2\pi$ para obter o comprimento da circunferência. O que significa que o arco de volta inteira é $2\pi$ vezes maior que o arco de amplitude um radiano. Logo, o arco de volta inteira tem $2\pi$ radianos de amplitude, pode-se então escrever $360^\circ = 2\pi$. [8]

Uma semirreta $\dot{O}P$ pode rodar em torno de O em dois sentidos diferentes. Ao sentido contrário ao dos ponteiros do relógio chama-se sentido positivo; ao sentido dos ponteiros do relógio chamamos de sentido negativo.

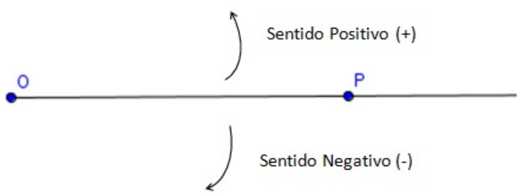



Figura 2.8: Sentido positivo e sentido negativo

Dado um ângulo qualquer, é sempre possível coloca-lo num referencial ortogonal e monométrico de modo que o vértice do ângulo coincida com a origem do referencial e que o lado origem do ângulo coincida com o semieixo positivo Ox.

Seja P um ponto qualquer do lado extremidade do ângulo e $(x_p, y_p)$ as suas coordenadas. Como o triângulo $[OAP]$ é retângulo em A, temos:

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{OP}} = \frac{y_p}{\overline{OP}}$$

$$cos\ \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{x_p}{\overline{OP}}$$

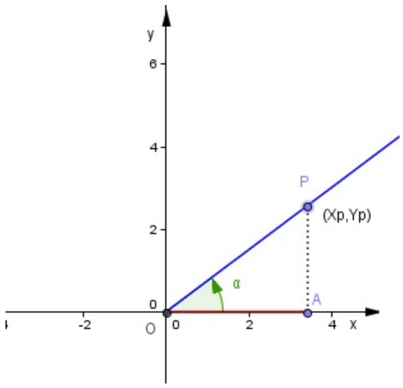



Figura 2.9: Ponto P no 1º Quadrante

Através dos quocientes anteriores, constata-se que na definição de seno e cosseno do ângulo , só intervêm as coordenadas de P e a distância de P à origem do referencial.

Esta definição aplica-se a qualquer ângulo, qualquer que seja a sua amplitude, desde que o seu lado origem esteja sobre o semieixo positivo Ox.
Assim, $sen\ \alpha = \frac{y_p}{\overline{OP}}$ e $cos\ \alpha = \frac{x_p}{\overline{OP}}$

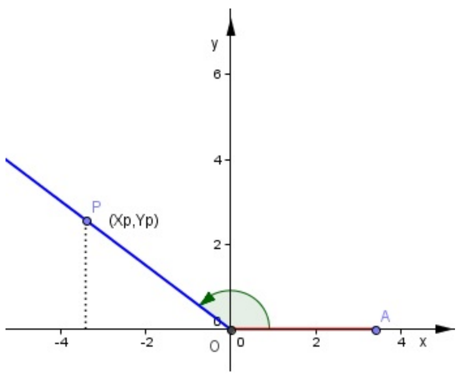



Figura 2.10: Ponto P no 2º Quadrante

em que $x_p$ é a abcissa e $y_p$ é a ordenada do ponto P e OP é a distância de P à origem O do referencial.

Deste modo relacionam-se as razões trigonométricas do triângulo retângulo com as coordenadas de um ponto num sistema de eixos coordenados.

Num referencial ortogonal e monométrico construa-se uma circunferência com centro na origem do referencial, com uma unidade de raio – círculo trigonométrico.
Seja $\alpha$ um ângulo e P um ponto em que o lado extremidade do ângulo intersecta a circunferência que limita o círculo trigonométrico.

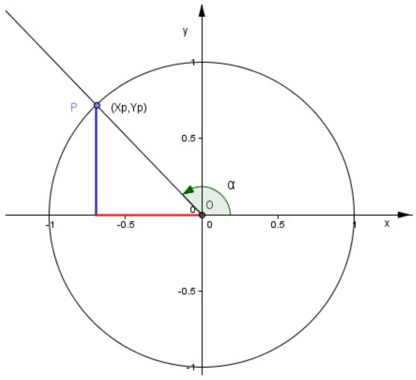



Figura 2.11: Ponto P no círculo trigonométrico

Como a distância de O a P é igual à unidade, vem que

$$sen\,\alpha = y_p \qquad e \qquad cos\,\alpha = x_p$$

Observe-se que para cada ponto $(x, y)$, tem-se que $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Suponha-se que o ponto P se movimenta no sentido positivo em torno da circunferência:

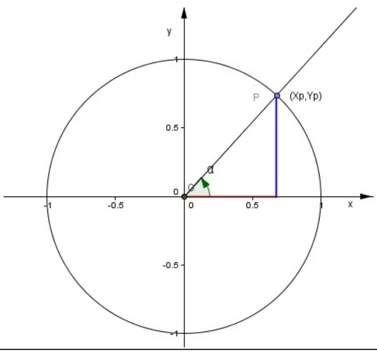
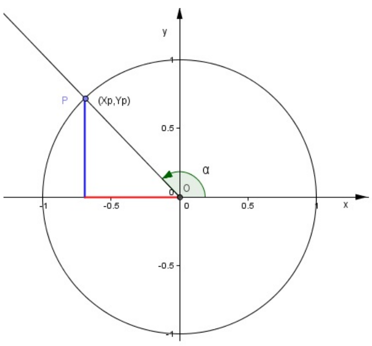
| Quadrante | Figura | Ângulo | Ponto P |
|---|---|---|---|
| 1º |  | $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ <br> $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ | Ponto com abcissa positiva e ordenada positiva |
| 2º |  | $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ <br> $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ | Ponto com abcissa negativa e ordenada positiva |

Tabela 2.1: Estudo do ponto P no círculo trigonométrico - 1º e 2º Quadrante

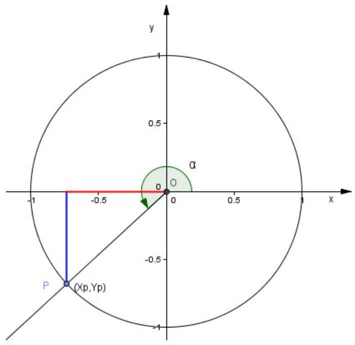
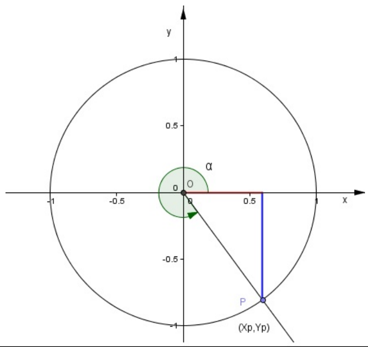
| Quadrante | Figura | Ângulo | Ponto P |
|---|---|---|---|
| 3º |  | $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ <br> $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ | Ponto com abcissa negativa e ordenada negativa |
| 4º |  | $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ <br> $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ | Ponto com abcissa positiva e ordenada negativa |

Tabela 2.2: Estudo do ponto P no círculo trigonométrico - 3º e 4º Quadrante

Se o ponto P continuar a sua trajetória haverá uma repetição da posição correspondente a uma trajetória já estudada (através das tabelas 2.1 e 2.2). Assim podemos concluir que existe uma relação de periodicidade.

## 2.4 Identidades Trigonométricas

### 2.4.1 Teorema de Ptolomeu

No Almagesto, Ptolomeu registou não só as suas tabelas trigonométricas como também todas os métodos usados para a sua construção. Para o cálculo das cordas utilizou uma proposição geométrica de extrema importância, que hoje conhecemos como o **Teorema de Ptolomeu**.

**Teorema de Ptolomeu:** Se ABCD é um quadrilátero convexo inscrito num círculo, então

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{DA} = \overline{AC}.\overline{BD},$$

isto é, a soma dos produtos de lados opostos é igual ao produto das diagonais.

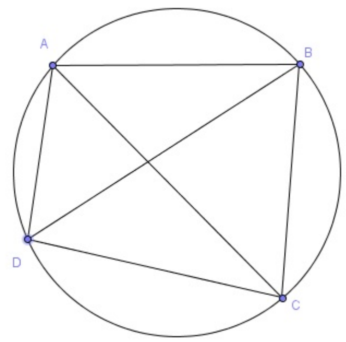



Figura 2.12: Teorema de Ptolomeu $\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{BC}.\overline{DA} = \overline{AC}.\overline{BD}$

**Demonstração:**
Sejam A, B, C e D quatro vértices consecutivos de um quadrilátero qualquer, inscrito numa circunferência.
Ptolomeu para demonstrar este teorema, considerou um ponto E sobre $[AC]$ de tal modo que os ângulos $A\widehat{B}E$ e $D\widehat{B}C$ tenham a mesma amplitude, e portanto $A\widehat{B}E = D\widehat{B}C$.

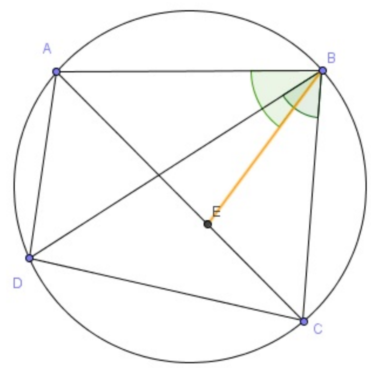



Figura 2.13: O ponto E é escolhido de modo que $A\hat{B}E = D\hat{B}C$

Em seguida, Ptolomeu demonstrou que os triângulos $[ABD]$ e $[EBC]$ são semelhantes: uma vez que o ponto E foi escolhido, então os ângulos $A\widehat{B}D$ e $E\widehat{B}C$ são congruentes. (Critério AA)

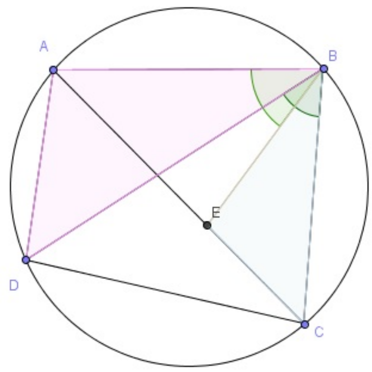



Figura 2.14: Os triângulos $[ABD]$ e $[EBC]$ são semelhantes

Além disso, os ângulos $A\hat{D}B$ e $B\hat{C}A$ são congruentes, pois são ângulos inscritos na circunferência que possuem o mesmo arco AB.
Como $B\hat{C}E = B\hat{C}A$, temos também a congruência dos ângulos $A\hat{D}B$ e $B\hat{C}E$, o que garante que os triângulos $[ABD]$ e $[EBC]$ são semelhantes.

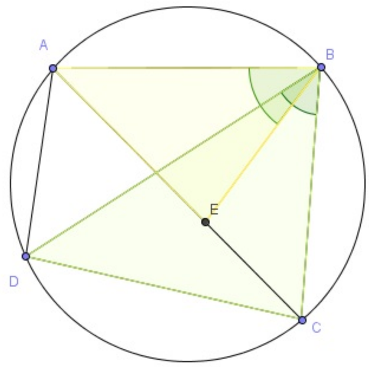



Figura 2.15: Os triângulos [EBA] e [CBD] são semelhantes

Assim temos que:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{EC}}, \text{ e então } \overline{AD}.\overline{BC} = \overline{BD}.\overline{EC}$$

De modo análogo, Ptolomeu deduz que os triângulos $[CBD]$ e $[EBA]$ são semelhantes. E portanto:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}, \qquad logo \qquad \overline{AB}.\overline{CD} = \overline{BD}.\overline{EA}$$

Somando as duas igualdades anteriores, obtem-se que:

$$\overline{AD}.\overline{BC} + \overline{AB}.\overline{CD} = \overline{BD}.\overline{EC} + \overline{BD}.\overline{EA}$$

$$\overline{AD}.\overline{BC} + \overline{AB}.\overline{CD} = \overline{BD}.\left(\overline{EC} + \overline{EA}\right)$$

$$\overline{AB}.\overline{CD} + \overline{AD}.\overline{BC} = \overline{BD}.\overline{AC}$$

Ficando assim a demonstração completa. [5]

### 2.4.2 Fórmula Fundamental da Trigonometria

Considere-se um triângulo retângulo $[ABC]$ em que as medidas dos lados são representadas por a, b e c, conforme é indicado na figura 2.16, sendo $\alpha$ a amplitude do ângulo de vértice B.

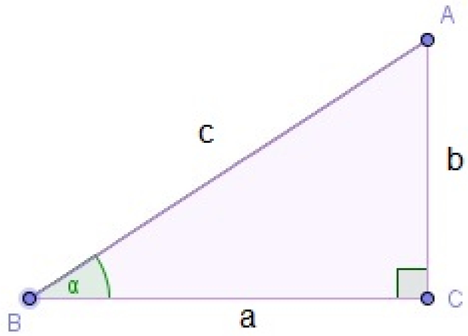



Figura 2.16: Triângulo retângulo $[ABC]$

As razões trigonométricas de $\alpha$ são:

$$sen\ \alpha = \frac{b}{c} \quad ; \quad cos\ \alpha = \frac{a}{c} \quad e \quad tan\ \alpha = \frac{b}{a}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras,

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (2.1)$$

então, recorrendo as razões trigonométricas

$$b = c \cdot sen\ \alpha \quad e \quad a = c \cdot cos\ \alpha$$

substituindo em 2.1, tem-se que:

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow (c \cdot cos\ \alpha)^2 + (c \cdot sen\ \alpha)^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow c^2(cos\ \alpha)^2 + c^2(sen\ \alpha)^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow (sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$$

Daqui se obtém a relação fundamental da trigonometria

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$$

### 2.4.3 Fórmulas do seno e cosseno da soma e da diferença

Com base no seu próprio teorema (Teorema de Ptolomeu), Ptolomeu deduziu as fórmulas do cosseno e do seno da soma e da diferença. Observemos geometricamente a validade destas fórmulas.

Sejam $\alpha$ e $\beta$ são ângulos centrais dentro de uma circunferência com raio 1, como representado na figura 2.17.

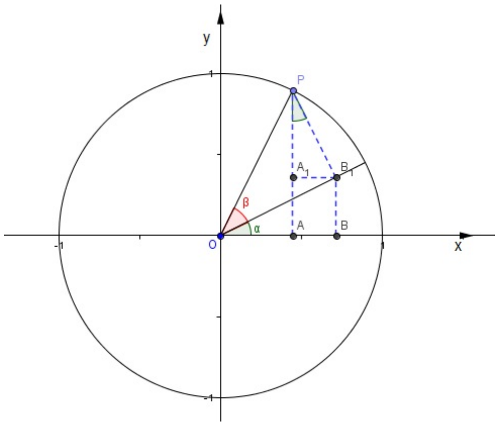



Figura 2.17: Círculo trigonométrico para dedução da fórmula do cosseno da soma

Do ponto P traçamos duas retas: uma perpendicular ao eixo Ox e a outra perpendicular a $[OB_1]$. Os ângulos $BOB_1$ e $A_1PB_1$ são iguais por serem agudos e terem os lados mutuamente perpendiculares.

Se $[PB_1]$ é perpendicular a $[OB_1]$, então temos:

$$\overline{OA} = cos\,(\alpha + \beta) \quad (2.2)$$

$$\overline{OB_1} = cos\,\beta \quad e \quad \overline{B_1P} = sen\,\beta,$$

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1} = sen\,\alpha \cdot sen\,\beta \quad uma \quad vez \quad que \quad sen\,\alpha = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{PB_1}} \Leftrightarrow sen\,\alpha = \frac{\overline{A_1B_1}}{sen\,\beta} \quad e$$

$$\overline{OB} = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta, \qquad pois \qquad cos\,\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB_1}} \Leftrightarrow cos\,\alpha = \frac{\overline{OB}}{cos\,\beta}$$

Logo,

$$\overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$$

Ou seja,

$$cos\,(\alpha + \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta. \quad (2.3)$$

Se considerarmos $-\beta$ em vez de $\beta$, na fórmula 2.3, e como $cos(-\beta) = cos\,\beta$ e $sen(-\beta) = -sen\,\beta$, obtemos:

$$cos\,(\alpha - \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta.$$

Por outro lado se considerarmos que $sen\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = cos\,\theta$ e $cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -sen\,\theta$, então através de 2.3 também obtemos que:

$$sen(\alpha + \beta) = cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + \beta)\right) = cos\left[\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \beta\right] = cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot cos\,\beta + sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot sen\,\beta$$

ou seja,

$$sen\,(\alpha + \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta + sen\,\beta \cdot cos\,\alpha,$$

e daqui resulta também que:

$$sen\,(\alpha - \beta) = sen\,\alpha \cdot cos\,\beta - sen\,\beta \cdot cos\,\alpha$$

Do cosseno e seno da soma e da diferença resultam ainda as fórmulas para o seno e cosseno do arco duplo:

$$cos\,2\alpha = cos^2\,\alpha - sen^2\,\alpha \quad e \quad sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha \cdot cos\,\alpha.$$

### 2.4.4 Lei dos senos

**Lei dos senos:** O seno de um ângulo de um triângulo qualquer é proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo.

$$\frac{a}{sen\,\beta} = \frac{b}{sen\,\alpha} = \frac{c}{sen\,\theta}$$

**Demonstração:**
Considere-se um triângulo $[ABC]$, qualquer, inscrito numa circunferência de raio r.

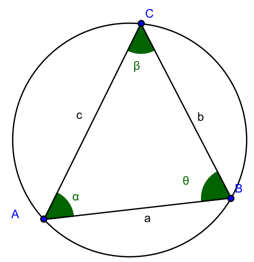



Figura 2.18: Triângulo inscrito numa circunferência de raio r

A partir do ponto A pode-se encontrar um ponto diametralmente oposto, o ponto D:

$$\overline{AD} = 2r$$

Traçando o segmento de reta DB formamos um novo triângulo, o triângulo $[ADB]$. O segmento de reta AD é um diâmetro da circunferência. Logo, o triângulo é retângulo em B, pois o vértice B é um ângulo com arco na semicircunferência.

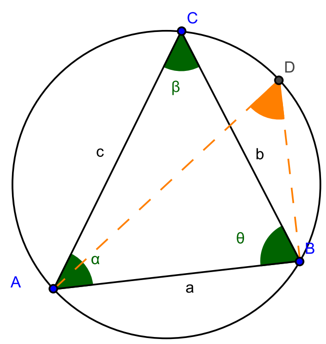



Figura 2.19: O triângulo $[ADB]$ é retângulo em B

O ângulo ACB e o ângulo ADB tem o mesmo arco AB. Como os pontos C e D são vértices de ângulos inscritos na circunferência, a amplitude dos seus ângulos é a mesma. Assim $\angle ACB = \angle ADB$

Portanto,

$$sen\ \widehat{D} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow sen\ \widehat{D} = \frac{a}{\overline{AD}}$$

$$\Leftrightarrow sen\ \beta = \frac{a}{\overline{AD}} \Leftrightarrow sen\ \beta = \frac{a}{2r} \Leftrightarrow 2r = \frac{a}{sen\ \beta}$$

De modo análogo, demonstra-se que

$$\frac{b}{sen\ \alpha} = \frac{c}{sen\ \theta}$$

Portanto,

$$\frac{a}{sen\ \beta} = \frac{b}{sen\ \alpha} = \frac{c}{sen\ \theta}$$

Completando-se assim a demonstração.[20]

### 2.4.5 Lei dos Cossenos

**Lei dos Cossenos:** Em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado entre eles.

**Demonstração:**
Considerando a figura 2.20, podemos observar três triângulos $[ABC]$, $[BCD]$ e $[BAD]$:

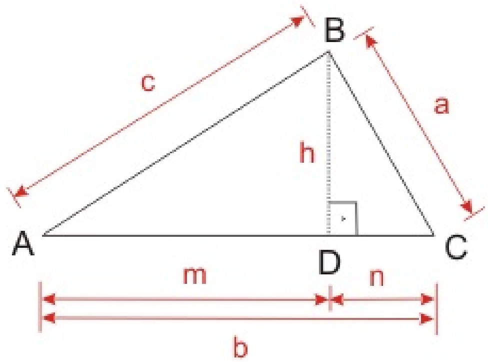



Figura 2.20: Triângulos $[ABC]$, $[BCD]$ e $[BAD]$ [20]

É possível definir as seguintes relações:

$$b = n + m \quad (2.4)$$

$$m = c.cos\ \hat{A} \quad (2.5)$$

Aplicando o teorema de pitágoras aos triângulos $[BCD]$ e $[BAD]$, obtemos as seguintes igualdades:

$$a^2 = n^2 + h^2 \quad e \quad c^2 = m^2 + h^2 \quad (2.6)$$

Por 2.4 e 2.6 vem,

$$a^2 = n^2 + h^2 \Leftrightarrow a^2 = (b-m)^2 + c^2 - m^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 - 2bm + m^2 + c^2 - m^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 - 2bm + c^2$$

Usando 2.5, deduz-se uma expressão geral da lei dos cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\hat{A}$$

Da mesma forma se demonstram as outras relações:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2abc \cdot cos\,\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + c^2 - 2abc \cdot cos\,\hat{C}$$

Ficando deste modo a demonstração completa.[20]

## 2.5 Trigonometria no ensino

O Programa de Matemática do Ensino Básico, que data de dezembro de 2007, apresenta as finalidades e os objetivos gerais para o ensino da matemática ao longo dos três ciclos de aprendizagem. Neste são propostas as metas para o ensino e a aprendizagem da matemática no ensino básico, tendo constantemente por base e respeitando sempre o Currículo Nacional.

Este programa dá primazia a três capacidades transversais e que merecem atenção permanente no ensino: a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

Em cada ciclo de aprendizagem é feita a introdução a cada tema matemático, e sempre que se justifique é feita a articulação com o programa do ciclo anterior.

No 1.º ciclo, os alunos adquirem intuitivamente a noção de ângulo e identificam diversos tipos de ângulos. Com esta base, no 2.º ciclo, introduz-se o conceito de amplitude, medem-se, classificam-se e constroem-se ângulos e triângulos. No decorrer destes dois ciclos vão sendo adquiridas noções que possibilitarão uma maior compreensão do tema Trigonometria.

Ainda no 2º ciclo, é abordada a construção de triângulos, os alunos aprendem a desigualdade triangular, as relações entre ângulos de lados paralelos, ângulo internos e ângulos externos de um triângulo. São introduzidas as noções de simetria e as isometrias, permitindo ao aluno desenvolver o conceito de congruência (figuras congruentes relacionam-se entre si através de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes). Estas transformações permitem a análise, construção e classificação de frisos e rosáceas. O conceito de amplitude de um ângulo e a sua medição em graus são introduzidas neste ciclo, e têm um papel importante no estudo das rotações e no trabalho com as figuras geométricas. [18]

No tema Geometria do 3º ciclo, os alunos, entre outas coisas, ampliam o seu estudo sobre as figuras geométricas no plano e no espaço, particularmente no que diz respeito aos triângulos (relações de congruência e semelhança, teorema de Pitágoras e razões trigonométricas no triângulo retângulo). Concretamente no 8.º ano de escolaridade, os alunos tomam contacto com figuras geométricas, e, compõem e decompõem polígonos recorrendo a triângulos e quadriláteros. Desta forma, surge a demonstração do teorema de Pitágoras que poderá ser feita por decomposição de um quadrado. É dada a noção de semelhança, nomeadamente o conceito de semelhança de triângulos, onde são estudados os critérios de congruência de triângulos (ALA, LAL, LLL).[18] Para aplicar estes conhecimentos o programa sugere que o professor proponha aos alunos problemas tais como *"calcular a altura de um candeeiro de rua, com o auxílio de uma estaca colocada perpendicularmente ao solo, medindo as respetivas sombras"* [14].

Na conclusão de ciclo, no 9.º ano de escolaridade é iniciado o estudo da circunferência e das propriedades relativas a ângulos ao centro, inscritos, arcos e cordas. Estas propriedades podem ser verificadas experimentalmente, utilizando um programa de geometria dinâmica. Deste modo o professor pode encaminhar os alunos a formular raciocínios e conjeturas mais intuitivamente.
É neste ano de escolaridade que surge pela primeira vez uma unidade didática dedicada à Trigonometria. Esta unidade intitula-se: Trigonometria do triângulo retângulo e permite aos alunos fazer um estudo das razões trigonométricas de ângulos agudos, a partir de triângulos retângulos semelhantes. Estudam-se algumas relações entre as razões trigonométricas, nomeadamente a

fórmula fundamental da Trigonometria e a fórmula que relaciona as três razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente). O professor deverá *“apresentar aplicações da trigonometria que estejam ao alcance dos alunos na física, na astronomia, ou em situação da vida real”* [14].

Segundo o Programa de Matemática, para além das orientações metodológicas que devem ser seguidas existem outras orientações que *“ assumem igualmente um papel importante neste programa e que dizem respeito às representações, à exploração de conexões, ao uso de recursos, à valorização do cálculo mental, da História da Matemática e do papel da Matemática no mundo atual, bem como às diferentes formas de trabalho na sala de aula.”* [18]

Realça-se ainda que, e em concordância com o que é referido no currículo nacional *“os alunos devem contactar com aspetos da História da Matemática e reconhecer o papel da Matemática no desenvolvimento da tecnologia e em várias técnicas. Na História da Matemática devem salientar-se o contributo de diversos povos e civilizações para o desenvolvimento desta ciência, a sua relação com os grandes problemas científicos e técnicos de cada época, o seu contributo para o progresso da sociedade, e a sua própria evolução em termos de notações, representações e conceitos, proporcionando uma perspetiva dinâmica sobre a Matemática e o seu papel na sociedade. Para além da perspetiva histórica, a apresentação do papel da Matemática na ciência e tecnologia da sociedade atual deve também ser valorizado, com referência a domínios tão diversos como as ciências da natureza, as ciências sociais e humanas, a saúde, o desporto e a arte.”* [18]

No que diz respeito ao ensino secundário, o Programa de Matemática A para os alunos de 10º ano de escolaridade sugere que se efetue o estudo do tema “Geometria Analítica”. Neste tema, os alunos estudam referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço. É também neste tema que o aluno descobre as relações entre as coordenadas de pontos simétricos relativamente aos eixos coordenados e às bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares. [21]

No 11.º ano de escolaridade, é feita uma continuidade da geometria estudada no ano anterior e assim abordam o tema “Geometria no Plano e no Espaço II”. Aqui os alunos são convidados a aplicar os conhecimentos que adquiriram anteriormente sobre Trigonometria, no 9º ano de escolaridade e geometria do 10.º ano de escolaridade. Nesta unidade as noções de ângulo, arco e razões trigonométricas são mais trabalhadas e consolidadas. Surge uma nova medida de ângulo, o radiano, são estudadas as funções seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico, e as equações trigonométricas elementares que os alunos devem ser capazes de resolver.

No 12.º ano de escolaridade existe uma unidade dedicada apenas à Trigonometria, intitulada por “Trigonometria e Números Complexos”. Com esta unidade pretende-se que os alunos efetuem um estudo das funções trigonométricas; cálculo das derivadas das funções trigonométricas, assim como, a utilização de funções trigonométricas na modelação de situações reais, recorrendo às capacidades específicas da calculadora gráfica. Relativamente aos números complexos recomenda-se que os alunos representem números complexos, tanto na forma trigonométrica, como na algébrica. Ao longo do ensino secundário esta unidade encerra o estudo da Trigonometria.

Segundo as Normas para os anos 9.º- 12.º para a Geometria, os alunos deverão utilizar relações trigonométricas para determinar comprimentos e amplitudes de ângulos, bem como, resolver problemas que surjam em matemática e em outros contextos. [16]

O Nacional Council of Teachers of Mathematics - NCTM, menciona que *“os problemas de aplicação podem proporcionar contextos ricos quer para a utilização de ideias geométricas, quer para a prática na modelação e resolução de problemas”.* [16] Desta forma, indica que o tema trigonometria do triângulo retângulo é bastante útil e com um conteúdo rico para resolver uma diversidade de problemas práticos.

O Programa da Matemática para o Ensino Básico dá enfâse a resolução de problemas e incentiva o usa da calculadora referindo que *“ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objetos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objetivo prioritário de aprendizagem.”* [18]
No entanto alerta para que *“a calculadora e o computador não devem ser usados para a realização de cálculos imediatos ou em substituição de cálculo mental.”* [18]

## 2.6 Natureza - Trigonometria, ida e volta

A trigonometria pode ser usada em inúmeras situações do quotidiano. Exemplo disso é um artigo publicado na Gazeta da Matemática nº 169, intitulado “Observar Golfinhos...com trigonometria”. Os autores Pedro Duarte, Telmo Peixe e Teresa Caissotti após uma conversa com a bióloga Rute Portugal sobre a observação de golfinhos no Sado, mostraram interesse em averiguar a área onde o golfinho se pode localizar.

A observação é efetuada por dois observadores em simultâneo, encontrando-se cada um em margens opostas do Sado. Para a observação são usados instrumentos óticos de observação, no entanto estes não são exatos e ocorrem erros de observação, e por isso a posição do golfinho não pode ser determinada com exatidão.
A provável localização do golfinho é dada pela interseção dos ângulos de observação.
Usando um pouco de trigonometria e alguma geometria Euclidiana é possível obter fórmulas para calcular a área de localização, que pode ser um quadrilátero convexo, um triângulo ou um “quadrilátero aberto” com área infinita. Dependendo do polígono que a área de localização forma teremos expressões analíticas diferentes.


Figura 2.21: Os observadores A e B em margens opostas do Sado.

A observação é efetuada por dois observadores localizados nos pontos A e B, a uma distância *d*, esta observação faz-se em simultâneo. A posição do golfinho é designada pelo ponto C.
O ângulo $\theta_1$ e $\theta_2$ são os ângulos medidos pelos observadores, com os instrumentos óticos, e $\theta$ é a margem de erro do instrumento utilizado. Designamos por 'amplitude de observação' dos observadores A e B, o intervalo de amplitude $2\theta$.
O polígono de localização do golfinho é dado pela região de interseção dos dois ângulos de observação. Este polígono de localização poderá ser um polígono fechado ou a localização pode ser ilimitada. Caso seja um polígono fechado teremos uma área finita e portanto possível de determinar e calcular, caso contrário teremos uma área infinita, impossível de determinar e calcular.
A área de localização vai depender da distância, d, entre os observadores; das medições $\theta_1$ e $\theta_2$ efetuadas pelos observadores e de $\theta$, a margem de erro do instrumento ótico.

Tendo por base alguns resultados teóricos, nomeadamente a lei dos senos, a fórmula elementar da área do triângulo e o teorema do arco capaz, é possível determinar a área onde o golfinho se localiza. Tentando ir mais longe os autores tentaram averiguar como são as curvas, na carta geográfica, que separam as regiões correspondentes às diferentes configurações do polígono de localização, ou como é a curva que delimita a região onde o polígono é fechado.

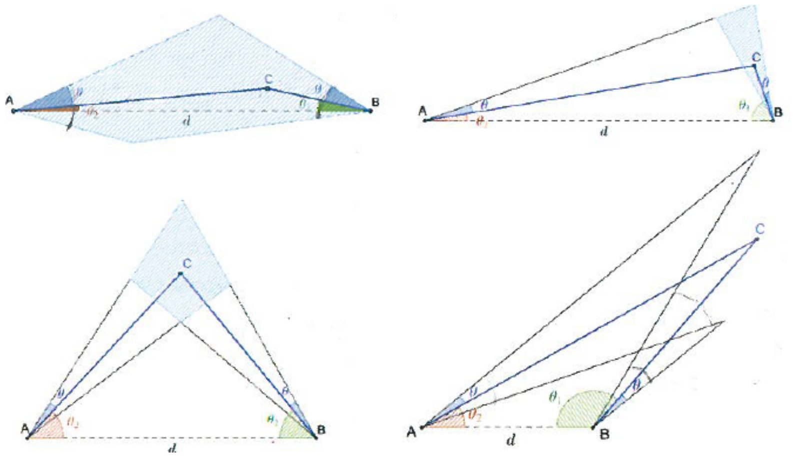


Figura 2.22: Representações geométricas dos observadores (A e B) e quatro possíveis localizações do golfinho (ponto C).[7]

Se A e B são os pontos que representam as posições dos observadores e recorrendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180^\circ$, é possível concluir que o polígono de localização é fechado se $\theta_1 + \theta_2 < 180^\circ - 2\theta$ e é aberto quanto $\theta_1 + \theta_2 \geqslant 180^\circ - 2\theta$.

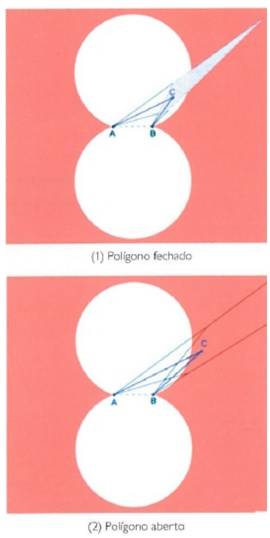



Figura 2.23: Regiões onde o polígono é fechado (a branco) e é aberto (a vermelho)[7]

Sempre que o golfinho é avistado no interior das circunferências ou sobre a circunferência temos um polígono de localização fechado.

Caso contrário, o polígono de localização é aberto e consequentemente a área é infinita.

No caso em que o polígono de localização é fechado temos situações distintas:

1. $\theta_1 \leqslant \theta$, $\theta_2 \leqslant \theta$ e $2\theta + \theta_1 + \theta_2 < 180^\circ$, que designamos por região 1 ($R1$);

2. $\theta_1 \leqslant \theta$, $\theta_2 \geqslant \theta$ e $2\theta + \theta_1 + \theta_2 < 180^\circ$, que designamos por região 2 ($R2$);

3. $\theta_1 \geqslant \theta$, $\theta_2 \leqslant \theta$ e $2\theta + \theta_1 + \theta_2 < 180^\circ$, que designamos por região 3 ($R3$);

4. $\theta_1 \geqslant \theta$, $\theta_2 \geqslant \theta$ e $2\theta + \theta_1 + \theta_2 < 180^\circ$, que designamos por região 4 ($R4$)

O estudo efetuado permitiu concluir que se o golfinho se encontra numa área finita,e o polígono de localização vai ter diferentes formas. Este vai depender de onde o golfinho é avistado.

Tal como foi referido anteriormente, designaremos as regiões por R1, R2, R3 e R4. Estas são distintas e portanto às suas áreas são expressas por expressões analíticas distintas.

Apresentamos aqui um quadro resumo com os resultados para as regiões R1, R2 e R3 e desenvolvemos a seguir o estudo da região R4.

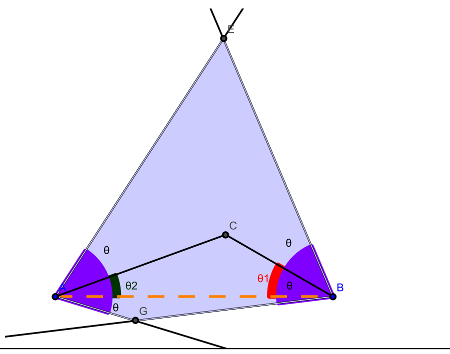
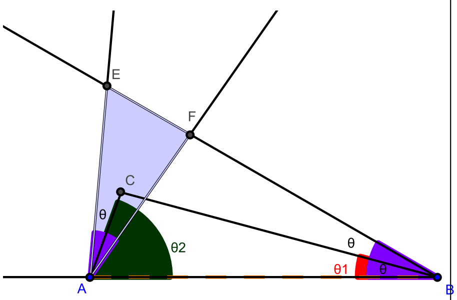
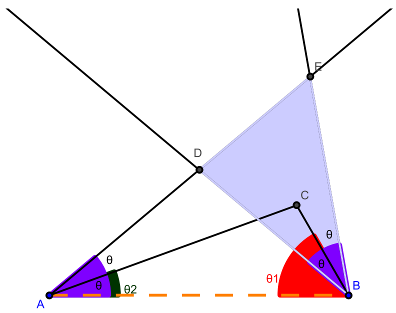
| Região | Polígono de Localização | Área de Localização |
|---|---|---|
| R1 |  | $A_{[AGBE]} = \frac{1}{2}\overline{AE}\,\overline{AB}sen(\theta_2+\theta) + \frac{1}{2}\overline{AG}\,\overline{AB}sen(\theta_1-\theta),$ onde $\overline{AE} = \frac{\overline{AB}sen(\theta_1+\theta)}{sen(\theta_1+\theta_2+2\theta)}$ e $\overline{AG} = \frac{\overline{AB}sen(\theta_1-\theta)}{sen(2\theta-\theta_1-\theta_2)}$ |
| R2 |  | $A_{[AEF]} = \frac{1}{2}\overline{AE}\,\overline{AF}sen(2\theta),$ onde $\overline{AE} = \frac{\overline{AB}sen(\theta_1+\theta)}{sen(\theta_1+\theta_2+2\theta)}$ e $\overline{AF} = \frac{\overline{AB}sen(\theta_1+\theta)}{sen(\theta_1+\theta_2)}$ |
| R3 |  | $A_{[BDE]} = \frac{1}{2}\overline{BD}\,\overline{BE}sen(2\theta),$ onde $\overline{BD} = \frac{\overline{AB}sen(\theta_2+\theta)}{sen(\theta_1+\theta_2)}$ e $\overline{BE} = \frac{\overline{AB}sen(\theta_2+\theta)}{sen(\theta_1+\theta_2+2\theta)}$ |

Tabela 2.3: Regiões de localização do golfinho

Estude-se a região R4 mais pormenorizadamente. Se o golfinho se encontrar na região R4, o polígono de localização é:

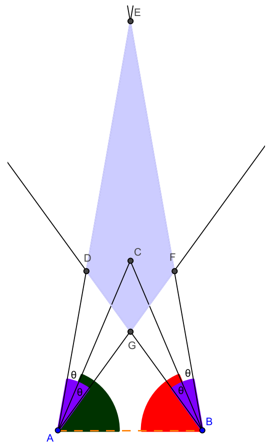



Figura 2.24: Região R4, onde o golfinho pode ser localizado.

A área de localização é definida pelo polígono [DEFG] em função de $\theta$, $\theta_1$ e $\theta_2$,

$$A_{[DEFG]} = A_{[EDF]} + A_{[DGF]}$$

$$A_{[DEFG]} = \frac{1}{2}\overline{FG}\;\overline{DG} sen(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta) + \frac{1}{2}\overline{DE}\;\overline{EF} sen(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)$$

Consideremos os triângulos [AEB], [ADB], [AFB] e [AGB], separadamente. Em cada triângulo usaremos a lei dos senos, obtendo assim seguintes expressões.

- Triângulo [AEB]

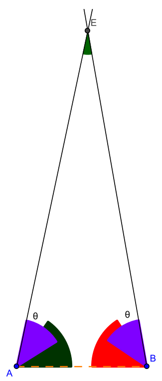



Figura 2.25: Triângulo AEB, do Polígono de Região R4.

$$\frac{\overline{AE}}{sen(\theta_1 + \theta)} = \frac{\overline{AB}}{sen(\theta_2 + \theta_1 + 2\theta)} = \frac{\overline{BE}}{sen(\theta_2 + \theta)}$$

- Triângulo [ADB]

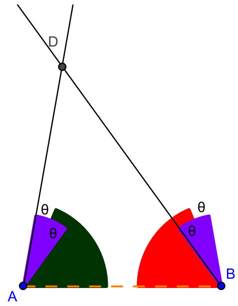



Figura 2.26: Triângulo ADB, do Polígono de Região R4.

$$\frac{\overline{AD}}{sen(\theta_1 - \theta)} = \frac{\overline{AB}}{sen(\theta_2 + \theta_1)} = \frac{\overline{BD}}{sen(\theta_2 + \theta)}$$

- Triângulo [AFB]

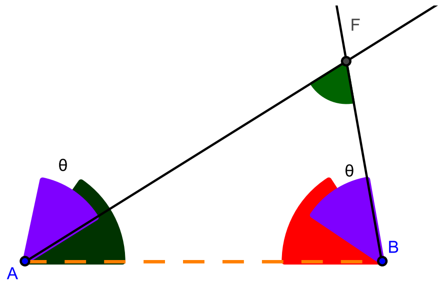



Figura 2.27: Triângulo AFB, do Polígono de Região R4.

$$\frac{\overline{AF}}{sen(\theta_1 + \theta)} = \frac{\overline{AB}}{sen(\theta_2 + \theta_1)} = \frac{\overline{BF}}{sen(\theta_2 - \theta)}$$

- Triângulo [AGB]

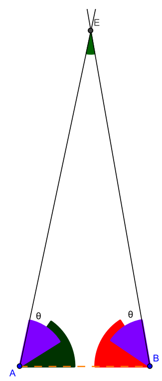


Figura 2.28: Triângulo AGB, do Polígono de Região R4.

$$\frac{\overline{AG}}{sen(\theta_1 - \theta)} = \frac{\overline{AB}}{sen(\theta_2 + \theta_1 - 2\theta)} = \frac{\overline{BG}}{sen(\theta_2 - \theta)}$$

Precisamos de calcular o comprimento do segmento FG, e sabemos que:

$$\overline{AF} = \overline{AG} + \overline{FG} \Leftrightarrow \overline{FG} = \overline{AF} - \overline{AG}$$

utilizando os dados obtidos anteriormente então,

$$\overline{FG} = \frac{\overline{AB}sen(\theta_1 + \theta)}{sen(\theta_2 + \theta_1)} - \frac{\overline{AB}sen(\theta_1 - \theta)}{sen(\theta_2 + \theta_1 - 2\theta)}$$

De modo análogo determinamos os segmentos de reta DG, DE e EF, e assim:

$$\overline{DG} = \frac{\overline{AB}sen(\theta_2 + \theta)}{sen(\theta_2 + \theta_1)} - \frac{\overline{AB}sen(\theta_2 - \theta)}{sen(\theta_2 + \theta_1 - 2\theta)}$$

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AB}sen(\theta_1 + \theta)}{sen(\theta_2 + \theta_1 + 2\theta)} - \frac{\overline{AB}sen(\theta_1 - \theta)}{sen(\theta_2 + \theta_1)}$$

$$\overline{EF} = \frac{\overline{AB}sen(\theta_2 + \theta)}{sen(\theta_2 + \theta_1 + 2\theta)} - \frac{\overline{AB}sen(\theta_2 - \theta)}{sen(\theta_2 + \theta_1)}$$

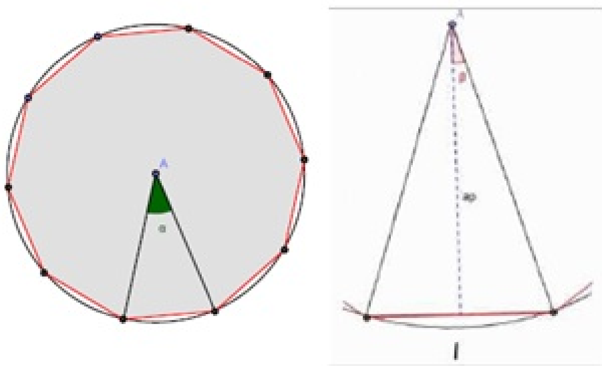
A área da região R4 é dada por, $A_{[DEFG]} = A_{[EDF]} + A_{[DGF]}$

$$A_{[DEFG]} = \frac{1}{2}\overline{FG}\,\overline{DG}sen(\theta_1 + \theta_2 - 2\theta) + \frac{1}{2}\overline{DE}\,\overline{EF}sen(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta)$$

## 2.7 Polígonos regulares com Áreas e Perímetros Racionais

Outro exemplo da aplicação da trigonometria é o exemplo da investigação levada a cabo por Killgrove e Koster, publicado na *Mathematics Magazine* sobre áreas e perímetros racionais em polígonos regulares[1]. Estes dois norte-americanos, efetuaram um estudo sobre quais os polígonos regulares, inscritos e circunscritos no círculo unitário, que têm área ou perímetro racional, que se apresenta de seguida.

Considerando-se um polígono regular inscrito ou circunscrito, e usando a noção de perímetro e área e aplicando alguma trigonometria é possível concluir que: Assim,

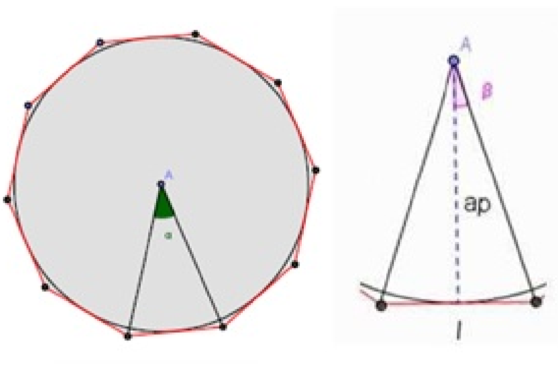



$$sen\beta = \frac{\frac{l}{2}}{1} \Leftrightarrow 2sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = l$$

Figura 2.29: Polígono regular inscrito com ângulo ao centro $\alpha = \dfrac{2\,\pi}{n}$ portanto $\beta = \dfrac{\pi}{n}$

| Área | Perímetro |
|---|---|
| $A_i(n) = \frac{n}{2}\, sen\left(2\frac{\pi}{n}\right)$ | $P_i(n) = 2n\, sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$ |

Tabela 2.4: Área e Perímetro do Polígono Inscrito




$$tan\beta = \frac{\frac{l}{2}}{1} \Leftrightarrow 2tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = l$$

Figura 2.30: Polígono regular circunscrito com ângulo ao centro $\alpha = \dfrac{2\,\pi}{n}$ portanto $\beta = \dfrac{\pi}{n}$

Para o caso do polígono circunscrito obtemos:

[1]"Regular Polygons with Rational Area or Perimeter", título original

| Área | Perímetro |
| --- | --- |
| $A_c(n) = \dfrac{2n\, tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} = n\, tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ | $P_c(n) = 2n\, tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ |

Tabela 2.5: Área e Perímetro do Polígono Circunscrito

Como é possível verificar $P_c(n) = 2A_c(n)$, e assim num polígono circunscrito de $n$ lados, a área será racional se e só se o perímetro é racional.

Observa-se ainda que para se obterem valores racionais com as fórmulas anteriormente deduzidas é necessária a determinação dos múltiplos racionais de $\pi$ onde esses valores são obtidos.

Para responder à questão sobre a possibilidade de $A_i(n)$, $P_i(n)$, $A_c(n)$ e $P_c(n)$ serem números racionais, parte-se da expressão $cos\ (2\theta) = 2\, cos^2\theta - 1$. Recorrendo à fórmula do cosseno da soma conseguimos mostrar que $cos\ (3\theta) = 4\, cos^3\theta - 3\, cos\,\theta$ e que $cos\ (4\theta) = 8\, cos^4\theta - 8\, cos^2\theta + 1$.

Podemos generalizar estas fórmulas e assim escrever:

$$cos\,(n\,\theta) = cos\,(\theta\,(n-1))\ cos\,\theta - sen\ (\theta\,(n-1))\ sen\,\theta \quad (2.7)$$

É possível expressar $cos\,(n\,\theta)$ como uma função polinomial em $cos\,\theta$. Estas funções polinomiais,que denotaremos por $T_n$, chamam-se **Polinómios de Chebyschev**.

Assim,

| Fórmulas Trigonométricas | Polinómios $T_n(x)$ |
| --- | --- |
| $cos\,(0\theta) = 1$ | $T_0(x) = 1$ |
| $cos\,(1\theta) = cos\theta$ | $T_1(x) = x$ |
| $cos\,(2\theta) = 2cos^2\theta - 1$ | $T_2(x) = 2x^2 - 1$ |
| $cos\,(3\theta) = 4cos^3\theta - 3cos\theta$ | $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ |
| $cos\,(4\theta) = 8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1$ | $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ |

Tabela 2.6: Fórmulas Trigonométricas e Polinómios $T_n(x)$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4$

Através das fórmulas trigonométricas do cosseno da soma e da diferença, conseguir deduzir uma relação de recorrência que é satisfeita por estes polinómios:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad (2.8)$$

Da fórmula 2.7 deduz-se

$$cos\,(n\,\theta) = cos\,((n-1)\,\theta + \theta) = cos\,(\theta\ (n-1))\ cos\,\theta - sen\ (\theta\ (n-1))\ sen\,\theta$$

e

$$cos\,((n-2)\,\theta) = cos\,((n-1)\,\theta - \theta) = cos\,((n-1)\,\theta)\, cos\,\theta + sen\,((n-1)\,\theta)\, sen\,\theta \quad (2.9)$$

Por 2.7 podemos escrever que:

$$cos\,(n\,\theta) - cos\,\theta\,cos\,((n-1)\,\theta) = -sen\,\theta\,sen\,((n-1)\,\theta)$$

$$\Leftrightarrow sen\,\theta\,sen\,((n-1)\,\theta) = cos\,\theta\,cos\,((n-1)\,\theta) - cos\,(n\,\theta)$$

Substituindo em 2.9, vem que:

$$cos\,((n-2)\,\theta) = cos\,((n-1)\,\theta)\;cos\,\theta + cos\,\theta\,cos\,((n-1)\,\theta) - cos\,(n\,\theta)$$

$$\Rightarrow cos\,(n\,\theta) = 2cos\,((n-1)\,\theta)\,cos\,\theta - cos\,((n-2)\,\theta)$$

Assim, usando a notação dos Polinómios de Chebyshev podemos escrever a fórmula 2.8.

Se tivermos em mente que $T_n\,(cos\,\theta) = cos\,(n\,\theta)$ e considerarmos $\theta = \dfrac{2m\pi}{n}$ então obtemos uma importante propriedade para os polinómios atrás referidos:

$$T_n\left(cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right)\right) = cos\left(n\frac{2m\pi}{n}\right) = cos\,(2m\pi) = 1,\ (1)$$

para qualquer inteiro m.

Agora recorrendo à relação de recorrência 2.8, considerando os valores iniciais $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$ e recorrendo ao método de indução é possível verificar as seguintes propriedades propriedades:

- Para $n \geqslant 0$ o polinómio $T_n(x)$ tem grau n e coeficientes inteiros. (2)
- Para $n \geqslant 1$ o coeficiente principal de $2T_n(x)$ é $2^n$. (3)
- Para $n \geqslant 0$ o coeficiente de $x^k$ em $2T_n(x)$ é divisível por $2^k$. (3)

Aplicando as propriedades anteriores para verificar a possibilidade de $A_i(n)$, $P_i(n)$, $A_c(n)$ e $P_c(n)$ serem valores racionais é agora mais simples.

Usando a propriedade (2) e (3) conclui-se que $2T_n\left(\dfrac{x}{2}\right)$ é um polinómio mónico com coeficientes inteiros.

Considerando $f_n(x) = 2T_n\left(\dfrac{x}{2}\right) - 2$ e aplicando a propriedade (1) vamos obter:

$$f_n\left(2cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right)\right) = 2T_n\left(cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right)\right) - 2 = 2\times 1 - 2 = 0,$$

para qualquer inteiro $m$.

Assim, para qualquer inteiro $m$, $2cos\left(\dfrac{2m\pi}{n}\right)$ é uma raíz do polinómio mónico com coeficientes inteiros.

Considerando o polígono inscrito com $n$ lados, recordemos da tabela 2.4, que $P_i(n) = 2n\,sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.

Para o seu perímetro ser racional então temos $sen\left(\frac{\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$ e assim $cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$

De modo semelhante, se $A_i(n) \in \mathbb{Q}$ temos que $sen\left(\frac{2\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$ e portanto

$$cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = 1 - 2\,sen^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$$

Considerando agora o caso dos polígonos circunscritos queremos $A_c(n) \in \mathbb{Q}$ ou que $P_c(n) \in \mathbb{Q}$ e assim, recorrendo à tabela 2.5, tem que se ter $tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$, logo

$$1 + cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 1 + 2cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1 = 2cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2}{\frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}}$$

que é equivalente a

$$1 + cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2}{1 + tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

ou seja, mais uma vez se conclui que $cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$

Deste modo podemos concluir que:

- Se $n$ for o número de lados de um polígono regular, então os polígonos regulares inscritos com perímetro racional e os polígonos regulares circunscritos com área e perímetro racional têm que satisfazer $cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$

- Se $n$ for o número de lados de um polígono regular, então os polígonos regulares inscritos com área racional têm de satisfazer $cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$

Pela propriedade (1), para qualquer inteiro $m$, $2cos\left(\frac{2m\pi}{n}\right)$ é um zero do polinómio mónico $f_n(x)$. E em particular para $m = 1$ e $m = 2$, logo $2cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ e $2cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)$ são zeros do polinómio mónico $f_n(x)$.

Mas se o polinómio de grau $n$ dado por $f_n(x) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ é mónico então pode escrever-se como:

$$c_0 + c_1x + \ldots + c_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

Ou seja, o coeficiente principal $c_n$ é 1.

Utilizando o Teorema da Raíz Racional [2] uma raiz racional tem um denominador que divide o coeficiente $c_n = 1$ logo, tem que ter denominador 1. Como os restantes coeficientes do polinómio

[2] Teorema da Raíz Racional - Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, um polinómio $\in \mathbb{Z}$, onde $a_0 \neq 0$ e $a_n \neq 0$.
Se uma fração irredutível $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ é uma raíz de $f(x)$ então $r|a_0$ e $s|a_n$ (r é divisor de $a_0$ e s é divisor de $a_n$).

$f_n(x)$ são inteiros, e o numerador tem que dividir $c_0$, estas raízes racionais $2cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ e $2cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)$ têm de ser inteiras.

Como $-1 \leqslant cos(\theta) \leqslant 1$ para todo o $\theta \in \mathbb{R}$, então procuramos inteiros nos intervalos:

$$-2 \leqslant 2cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \leqslant 2$$

$$-2 \leqslant 2cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) \leqslant 2$$

Basta procurar os inteiros em $[-2, 2]$ para igualar a eles as expressões de $2cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ e $2cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)$ resolver as seguintes equações trigonométricas:

$$\begin{array}{ll}
2cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = -2 & 2cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = -2 \\
2cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = -1 & 2cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = -1 \\
2cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 0 & 2cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = 0 \\
2cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 1 & 2cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = 1 \\
2cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2 & 2cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = 2
\end{array}$$

Depois de resolver as equações trigonométricas anteriores, constata-se que:

$$\begin{array}{llll}
cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 0 & \Rightarrow n = 4 & cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = 0 & \Rightarrow n = 8 \\
cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{-1}{2} & \Rightarrow n = 3 & cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = \frac{-1}{2} & \Rightarrow n = 6 \\
cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} & \Rightarrow n = 6 & cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = \frac{1}{2} & \Rightarrow n = 12 \\
cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \pm 1 & \Rightarrow n = 2 & cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = -1 & \Rightarrow n = 4 \\
 & & cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) = 1 & \Rightarrow n = 2
\end{array}$$

As áreas e os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos $(A_i(n), P_i(n), A_c(n), P_c(n))$ são racionais quando os cossenos $cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$ e $cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q}$.

Recorrendo as equações trigonométricas foi possível concluir que $cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q} \Rightarrow n \in \{3, 4, 6\}$ e $cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) \in \mathbb{Q} \Rightarrow n \in \{4, 6, 8, 12\}$

Podemos compilar os dados na tabela seguinte:

| | Polígono Inscrito n lados | | Polígono Circunscrito n lados | |
|---|---|---|---|---|
| n | $A_i(n)$ | $P_i(n)$ | $A_c(n)$ | $P_c(n)$ |
| 3 | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ | $3\sqrt{3}$ | $3\sqrt{3}$ | $6\sqrt{3}$ |
| 4 | 2 | $4\sqrt{2}$ | 4 | 8 |
| 6 | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | 6 | $2\sqrt{3}$ | $4\sqrt{3}$ |
| 8 | $2\sqrt{2}$ | | | |
| 12 | 3 | | | |

Tabela 2.7: Quadro síntese

Como se pode constatar pela tabela 2.7 o quadrado e o dodecágono inscritos na círculo tem área racional. Apenas o héxagono inscrito possui perímetro racional. Relativamente aos polígonos circunscritos no círculo unicamente o quadadro tem área e perímetro racional.

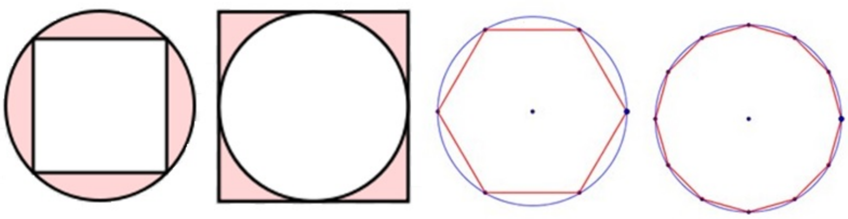


Figura 2.31: Polígonos com área e perímetro racional

## 2.8 Trigonometria Racional

A Trigonometria Clássica é aquela que conhecemos até hoje, em que são considerados na medição de triângulos os conceitos de distância e ângulo. O professor Norman Wildberger no livro “ Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry”, propõe o conceito de Trigonometria Racional. Segundo Wildberger o objetivo é substituir a medida dos lados a,b e c de um triângulo pelo valor dos seus quadrados, que designarei ao longo deste trabalho por quadrâncias[3]. Este termo já foi usado pelo autor, Luiz José da Silva num estudo de investigação [24]. Wildberger pretende também substituir a amplitude dos ângulos em graus ou radianos, pelo afastamento (nome que será usado para designar o que Wildberger intitula de spread).

Assim, a quadrância é o quadrado da distância, e o afastamento é a abertura entre duas retas.

A quadrância mede o quadrado da distância entre dois pontos. Um ponto num referencial é definido pelas coordenadas x e y em relação aos eixos coordenados e usa-se a notação $|A_1A_2|$ entre os pontos $A_1 \curvearrowright (x_1, y_1)$ e $A_2 \curvearrowright (x_2, y_2)$, assim

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Então a quadrância entre dois pontos é:

$$Q(A_1, A_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

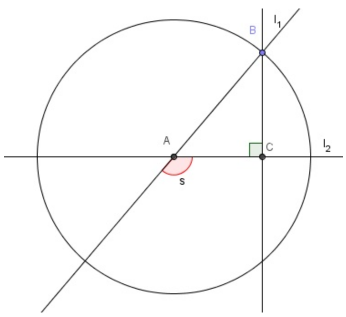



Figura 2.32: Separação de duas retas: afastamento

Seja o ponto $B \neq A$ na reta $l_1$. Considerando uma reta perpendicular a $l_2$ e que passa no ponto B, ao ponto de interseção chamamos C, como podemos observar pela figura 2.32.

O afastamento $s(l_1, l_2)$, entre as retas $l_1$ e $l_2$, é o quociente entre as quadrâncias

$$s(l_1, l_2) = \frac{Q(B, C)}{Q(A, B)}$$

Sejam $a_1x + b_1y = 0$ e $a_2x + b_2y = 0$, as equações de duas retas que se intersetam no ponto $A \curvearrowright (0, 0)$. Para calcular o afastamento entre estas duas retas consideremos um ponto B na reta $l_1$, $B \curvearrowright (-b_1, a_1)$. E um ponto arbitrário de $l_2$ $\quad C \curvearrowright (-\lambda b_2, \lambda a_2)$. As quadrâncias do triângulo [ABC] são:

$$Q(A, B) = b_1^2 + a_1^2$$

[3]quadrance, em inglês.

$$Q(A,C) = \lambda^2(b_2^2 + a_2^2)$$

$$Q(B,C) = (b_1 - \lambda b_2)^2 + (\lambda a_2 - a_1)^2 \quad (2.10)$$

O triângulo $[ABC]$ é retângulo em C, logo pelo teorema de Pitágoras

$$Q(A,C) + Q(B,C) = Q(A,B)$$

ou seja,

$$\lambda^2(b_2^2 + a_2^2) + (b_1 - \lambda b_2)^2 + (\lambda a_2 - a_1)^2 = b_1^2 + a_1^2$$

Depois de algumas simplificações, obtemos que

$$2\lambda(a_1a_2 + b_1b_2 - \lambda(a_2^2 + b_2^2)) = 0$$

$$\lambda = 0$$

$$\vee \qquad \lambda = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \quad (2.11)$$

Mas $\lambda = 0$ precisamente quando as retas são perpendiculares, então consideremos o caso 2.11. Assim substituindo 2.11 em 2.10, iremos obter que:

$$Q(B,C) = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{a_2^2 + b_2^2}$$

logo,

$$s(l_1, l_2) = \frac{Q(B,C)}{Q(A,B)} = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$$

Este afastamento entre duas retas pode ser medido e é sempre um número entre 0 e 1. 0 quando as retas são paralelas entre si e 1 quando as duas retas são perpendiculares. Um ângulo de amplitude $45^\circ$ corresponde a um afastamento de $\frac{1}{2}$, e um ângulo de amplitude $30^\circ$ e $60^\circ$, têem um afastamento, respectivamente, de $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$.

Mike Ossman é o autor deste novo transferidor, em alternativa ao transferidor tradicional.

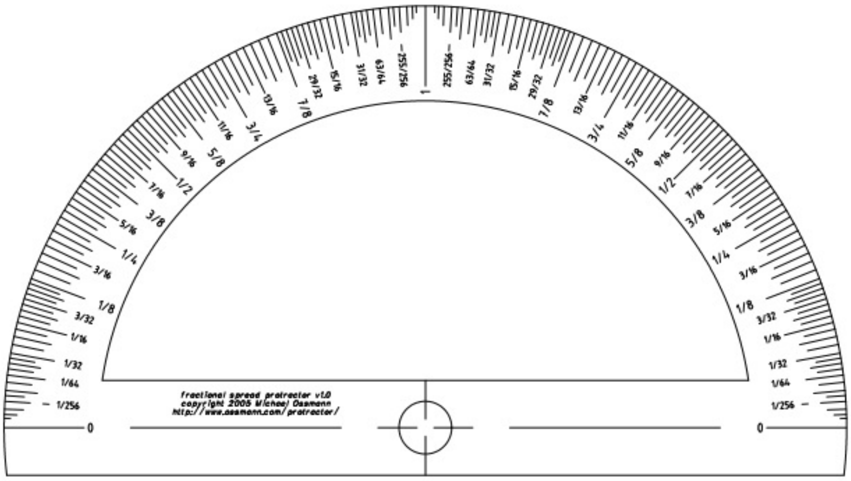



Figura 2.33: Transferidor da Trigonometria Racional

A pesquisa sobre esta nova abordagem da trigonometria foi feita nos artigos [26] [27] de Wildberger, onde este autor argumenta contra algumas dificuldades da trigonometria clássica, como por exemplo a imprecisão da definição de ângulo sem recurso ao cálculo e a falta de rigor das medidas em radianos. Propõe em alternativa as novas medidas de quadrância e afastamento que defende produzirem cálculos mais elementares.

### 2.8.1 Quadrância e afastamento - um exemplo

Considerando o triângulo $[A_1A_2A_3]$ no referencial e sejam os pontos os pontos $A_{1\hookrightarrow}(4,1)$, $A_{2\hookrightarrow}(1,2)$ e $A_{3\hookrightarrow}(2,4)$

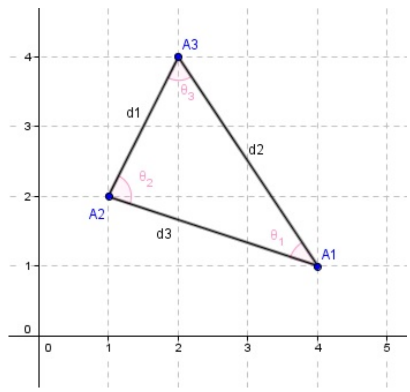



Figura 2.34: Representação geométrica do triângulo $[A_1A_2A_3]$

A distância entre dois pontos, usando o teorema de Pitágoras, é dada por:

$$d_1 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$$

De modo análogo, obtemos $d_2 = \sqrt{13}$ e $d_3 = \sqrt{10}$.

Os segmentos $d_1$ e $d_2$ foram um ângulo de amplitude $\theta_1$, pode-se calcular a sua amplitude usa-se a lei dos cossenos:

$$d_1^2 = d_2^2 + d_3^2 - 2d_2d_3 \, cos \, \theta_1$$

Depois de alguns iterações, tem-se o valor aproximado para $\theta_1$:

$$cos \, \theta_1 = \frac{13 + 10 - 5}{2\sqrt{10}\sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{130}}, \ ou \ seja \ \theta_1 \approx 0,789\,352 \ \ldots (radianos)$$

Do mesmo modo obtém-se a amplitude dos ângulos $\theta_2$ e $\theta_3$.

$$d_2^2 = d_1^2 + d_3^2 - 2d_1d_3 \, cos \, \theta_2$$

$$d_3^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \, cos \, \theta_3$$

Assim,

$$cos \, \theta_2 = \frac{5 + 10 - 13}{2\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} \quad \theta_2 \approx 1,428\,899 \ \ldots (radianos)$$

$$cos \, \theta_3 = \frac{5 + 13 - 10}{2\sqrt{5}\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \quad \theta_3 \approx 1,051\,650 \ \ldots (radianos)$$

Note-se que $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \approx \pi$

Em vez de se trabalhar com as três distâncias $d_1$, $d_2$ e $d_3$, a trigonometria racional trabalha com as três quadrâncias $Q_1$, $Q_2$ e $Q_3$. E em vez dos três ângulos $\theta_1$, $\theta_2$ e $\theta_3$, utiliza os três afastamentos $s_1$, $s_2$ e $s_3$.

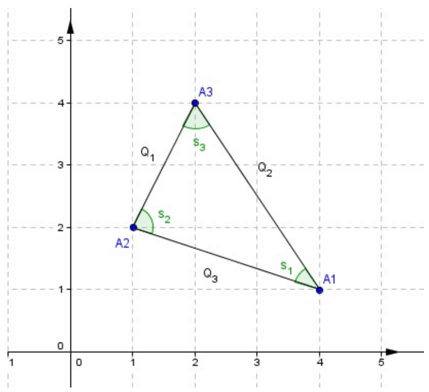



Figura 2.35: Quadrâncias e afastamentos

A quadrância entre dois pontos, por exemplo, $A_1$ e $A_2$ é dada por:

$$Q_1 = Q_{(A_2,A_3)} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

E portanto

$$Q_1 = Q_{(A_2,A_3)} = 5$$

$$Q_2 = Q_{(A_1,A_3)} = 13$$

$$Q_3 = Q_{(A_1,A_2)} = 10$$

As coordenadas de $A_1$, $A_2$ e $A_3$ são racionais, então $Q_1$, $Q_2$ e $Q_3$ são obrigatoriamente racionais, o que não acontece com as distâncias $d_1$, $d_2$ e $d_3$ que podem ser irracionais.

Com quadrâncias e afastamentos, algumas leis básicas tornam-se mais simples e exatas, segundo o autor Wildberger.[27]

### 2.8.2 Leis da Trigonometria Racional

Iniciando com uma lei básica e que assume as caraterísticas da Lei dos Cossenos, Wildberger estabelece a **Lei da Cruz** [4], que refere que:

$$(Q_2 + Q_3 - Q_1)^2 = 4Q_2Q_3\,(1 - s_1) \quad (2.12)$$

No exemplo dado anteriormente $Q_1 = 5$, $Q_2 = 13$ e $Q_3 = 10$ então podemos efetuar o cálculo:

$$1 - s_1 = \frac{(10 + 13 - 5)^2}{4 \times 10 \times 13} = \frac{81}{130}$$

e portanto,

$$s_1 = \frac{49}{130}$$

De modo análogo,

$$s_2 = \frac{49}{50}$$

$$s_3 = \frac{49}{65}$$

A **Lei do Afastamento** [5], substituí a Lei dos Senos e tem-se que:

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3} \quad (2.13)$$

Outra lei, a **Fórmula dos Três Afastamentos**[6], afirma que os três afastamentos de um triângulo satisfazem a condição:

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3 \quad (2.14)$$

Consideremos o caso em que $s_3 = 0$ então os três pontos $A_1$, $A_2$ e $A_3$ são colineares, o que significa que todos eles se encontram em uma única reta, e que se as três quadrâncias satisfazem a a condição $(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2$, então:

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2) \quad (2.15)$$

2.15 é a **Fórmula das Três Quadrâncias**.[7]

[4]Cross Law, em inglês
[5]Spread Law, em inglês
[6]Triple spread formula, em inglês
[7]Triple quad formula

Se $s_3 = 1$ então $[A_2\ A_3]$ e $[A_1\ A_3]$ são perpendiculares e temos o Teorema de Pitágoras[8]

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (2.16)$$

Wildberger, refere que esta "é uma fórmula mais agradável para o teorema mais importante da matemática." Também segundo o autor estas são as cinco principais leis da trigonometria racional, é tudo quanto necessário pra resolver a maioria dos problemas de trigonometria. [27]

| **Leis da Trigonometria Racional** |
|---|
| **Lei da Cruz**<br>Para qualquer triângulo $[A_1A_2A_3]$ definir a curz $c_3 = 1 - s_3$. Então<br>$(Q_2 + Q_3 - Q_1)^2 = 4Q_2Q_3\,(1 - s_1)$ |
| **Lei do Afastamento**<br>Para qualquer triângulo $[A_1A_2A_3]$<br>$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}$ |
| **Fórmula dos Três Afastamentos**<br>Para qualquer triângulo $[A_1A_2A_3]$<br>$(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3$ |
| **Fórmula das Três Quadrâncias**<br>Se os três pontos $A_1$,$A_2$ e $A_3$ são colineares, então<br>$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)$ |
| **Teorema de Pitágoras**<br>Se as retas $A_1A_3$ e $A_2A_3$ são perpendiculares então<br>$Q_1 + Q_2 = Q_3$ |

Tabela 2.8: Quadro resumo das leis da Trigonometria Racional

### 2.8.3 Um Exemplo comparado

Para poder verificar a prática a aplicação da trigonometria clássica e racional irei apresentar aqui, um exemplo de faz parte do livro *Divine Proportions* de Wildberger.[26]

**Problema:** Considere um triângulo $[A_1A_2A_3]$ com as seguintes distâncias $d(A_1, A_2) = 5$, $d(A_2, A_3) = 4$ e $d(A_3, A_1) = 6$. O ponto B é um ponto que se encontra sobre o segmento $A_1A_3$, o ângulo em $A_2 = 45\,^\circ$. Qual é a distância $d(A_2, B)$?

[8] Pythagoras' theorem

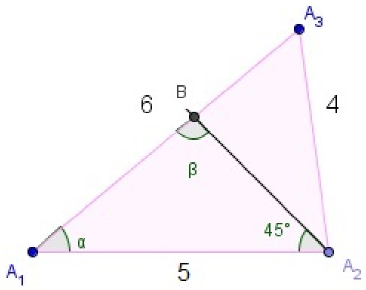



Figura 2.36: Triângulo - Exemplo da trigonometria clássica

**Resolução segundo a trigonometria clássica**
Consideremos os triângulos da figura 2.36. Aplicando o teorema dos cossenos ao triângulo $[A_1A_2A_3]$, vem que:

$$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times cos\,\alpha \Leftrightarrow cos\,\alpha = \frac{25 + 36 - 16}{2 \times 5 \times 6} = \frac{45}{60}$$

Assim, recorrendo à calculadora $\alpha \approx 41,4096\,^{\circ}$.

Como a soma do ângulos internos de um triângulo é $180\,^{\circ}$ então,

$$\beta \approx 180\,^{\circ} - 45\,^{\circ} - 41,4096\,^{\circ} \approx 93,5904\,^{\circ}.$$

Agora, aplicando a lei dos senos,

$$\frac{sen\,\alpha}{4} = \frac{sen\,\beta}{5}$$

para poder efetuar este cálculo é necessária a utilização da calculadora

$$d(A_2, B) = \frac{5\,sen\,41,4096\,^{\circ}}{sen\,93,5904\,^{\circ}} \approx 3,3137$$

**Resolução segundo a trigonometria racional**

Para aplicar a trigonometria racional, começamos por converter as informações iniciais de distâncias e ângulos para quadrâncias e afastamentos. As três quadrâncias deste triângulo são $Q_1 = 16$, $Q_2 = 36$ e $Q_3 = 25$.

O afastamento correspondente ao ângulo de $45\,^{\circ}$ é $\frac{1}{2}$.
Aplicam-se as leis da Trigonometria Racional, primeiro para determinar $s$, e depois $r$, e finalmente Q. Usando a **lei da cruz** obtemos:

$$(25 + 36 - 16)^2 = 4 \times 25 \times 36 \times (1 - s)$$

resolvendo em ordem a $s$, vamos obter que: $s = \frac{7}{16}$.

Agora, através a **fórmula dos 3 afastamentos** iremos obter o quadrado de **r**:

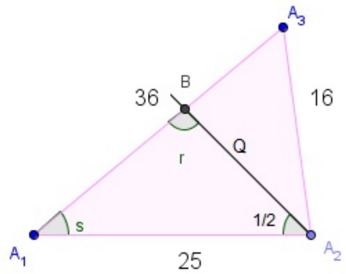



Figura 2.37: Triângulo - Exemplo da trigonometria racional

$$\left(\frac{7}{16}+\frac{1}{2}+r\right)^2 = 2\left(\frac{49}{256}+\frac{1}{4}+r^2\right)+4\times\frac{7}{16}\times\frac{1}{2}\times r$$

Simplificando obtêm-se $r^2 - r + \frac{1}{256} = 0$, então $r = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{16}\sqrt{7}$.

Depois de determinar $s$ e $r$, aplica-se a **lei do afastamento**:

$\frac{r}{25} = \frac{s}{Q}$, resolvendo em ordem a Q descobrimos que:

$$r_1 = 1400 - 525\sqrt{7}$$

$$r_2 = 1400 + 525\sqrt{7}$$

Para responder à questão temos de converter estes valores, e fazer a raíz quadrada:

$$d_1 = \sqrt{r_1} \approx 3,3137\ldots$$

$$d_2 = \sqrt{r_2} \approx 264,056\ldots$$

E portanto r=$d_1$.

A informação inicial descreve duas possibilidades diferentes. A segunda é a reta $A_2B$ que tem um afastamento de $\frac{1}{2}$ com a reta $A_1A_2$ como é mostrado na figura 2.38, com o ponto B situado à distância $d_2$ nesta direção.

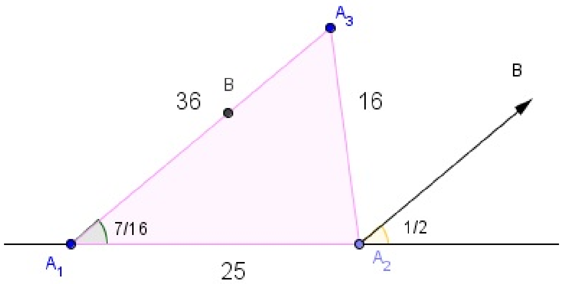



Figura 2.38: Possibilidade Alternativa

Usando a trigonometria racional a solução é mais exata e revela, neste caso, que a $\sqrt{7}$ esta ligada ao problema. No entanto $\sqrt{7}$ não deixa de ser um número irracional.

### 2.8.4 Considerações

Wildberger argumenta que a trigonometria racional é mais simples que a trigonometria clássica e mais fácil de aprender.

Se considerarmos que a trigonometria racional se baseia apenas no conceito de quadrância e afastamento, então poderemos concordar. Uma vez que na trigonometria clássica são necessários vários conceitos: distância, amplitude, seno, cosseno, tangente, etc...

Gildford[9] alerta para o facto de que: *"em alguns casos a trigonometria racional só dá aparência de um resultado racional"*. Realça ainda que no estudo de Wildberger não é revelado se a trigonometria racional é aplicável à maioria dos problemas que envolvem círculos ou rotação circular, nem se é possível produzir soluções para serem usadas em problemas de engenharia e ciência.

No que diz respeito ao exemplo atrás citado, é possível verificar que em ambos os casos é necessário recorrer à calculadora, talvez mais num caso do que no outro, no entanto ambos precisam. Na minha opinião a utilização da trigonometria clássica é mais rápida e direta, para o que se pretendia determinar.

Wildberger contribui com novas e surpreendentes ideias para um tema com uma longa história. No entanto, creio que não é justo desprezar a trigonometria clássica. Mesmo com os seus desafios, é de louvar a consistência e aplicabilidade de uma teoria construída ao longo de muitos séculos.

## 2.9 Considerações finais

No decorrer desta investigação analisei a origem, o percurso e até onde podem ir as novas ideias sobre a trigonometria.

Acredito que o uso da história da Matemática é fundamental para dar mais importância e significado ao ensino da trigonometria, pois possibilita aos alunos uma visão mais abrangente de como surge, a sua finalidade e as suas aplicações nos diversos contextos. É importante os alunos terem a oportunidade de relacionar os conteúdos de trigonometria com situações do quotidiano.

Relativamente à trigonometria racional, poderá aparentemente ser mais simples uma vez que iremos trabalhar com leis que permitem cálculos mais elementares e produzem com mais frequência resultados racionais, enquanto as definições da trigonometria clássica produzem na maioria dos casos resultados irracionais. No entanto, se considerarmos o número de interações que são necessárias para obter o resultado de um problema, a trigonometria clássica aparenta ser mais rápida, no meu ponto de vista.

Sobre a trigonometria racional muito mais haveria a dizer, no entanto esta apenas foi abordada a título de curiosidade e a investigação e estudo não foi feita de forma aprofundada.

# Capítulo 3

# Prática de Ensino Supervisionada

## 3.1 Introdução

A prática de ensino supervisionada é um culminar de um longo processo, ao qual me auto propus, um complemento à minha formação.
Setembro trouxe o início de um novo ano letivo, e para mim uma nova etapa. Uma etapa de receio, descoberta e experiência.

## 3.2 Síntese Estágio Pedagógico

O mestrado de ensino da matemática 3º ciclo do ensino básico e ensino secundário possui a unidade curricular de estágio pedagógico. Este visa articular as competências científicas, pedagógicas, didáticas e sociais em contexto escolar. Deste modo, deixo aqui uma síntese do estágio pedagógico, realizado na Escola Secundária Campos Melo (ESCM), na Covilhã.

Neste ano letivo 2013/2014, o núcleo de estágio foi constituído pela Prof.ª Maria Isaura Fazendeiro Mendes, orientadora cooperante, pela Prof.ª Dr.ª Sandra Bento, orientadora científica, Regina Guimarães, Manuel Feijão e por mim, estagiários.

A ESCM acolheu-nos de "braços abertos" e possibilitou-nos viver as primeiras experiências enquanto docentes de matemática. Estive presente em duas turmas de níveis diferentes, uma de 9º ano e outra de 12º ano, tendo lecionado em ambas as turmas. A turma de ensino básico era de ensino regular. Relativamente à turma de ensino secundário pertencia ao curso Científico Humanísticas de Ciências e Tecnologias, e portanto tinham a disciplina de Matemática A.

A turma de 9º ano era constituída por 23 alunos, 13 rapazes e 10 raparigas, a turma de 12º ano inicialmente era composta por 25 alunos, no final do ano ficou reduzida a 19 alunos, uma vez que houve alunos que anularam a matrícula. Num primeiro impacto sabia que iriam ser duas turmas bastante diferentes, quer por pensar na diferença da faixa etária, quer pelos conteúdos que iriam ser abordados. Uma responsabilidade acrescida uma vez que eram duas turmas sujeitas ao exame nacional, um para a conclusão de ciclo e a outra com vista o acesso ao ensino superior.

Cabe à escola no início de cada ano letivo a elaboração de um Plano Anual de Atividades - PAA. O PAA é um documento de planeamento e operacionalização do trabalho a desenvolver, contextualizando as diversas atividades que se irão realizar ao longo do ano letivo. O PAA assume e articula-se com os objetivos pedagógicos inseridos no Projeto Educativo de Escola (PEE).

Deste modo, a escola participa em vários concursos no âmbito da Matemática, nomeadamente: Olimpíadas Portuguesas da Matemática, organizadas pela Sociedade Portuguesa da Matemática; Canguru Matemático sem Fronteiras 2014, organizado pela Associação Canguru sem Fronteiras e

Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos. Tendo o núcleo de estágio participado e colaborado nestes concursos.
É ainda de referir que o núcleo de estágio dinamizou as seguintes atividades: ESCMDesafios, realizado a 3 de janeiro; Dia do Pi, que decorreu no dia 14 de março e exposição interativa no "dia dos departamentos", no dia 24 de abril.

O ESCMDesafios tinha como objetivo promover uma nova visão de aprender Matemática, contribuindo, assim, para desenvolver o gosto e melhorar a relação dos alunos com a disciplina. Esta atividade foi realizada na cidade da Covilhã, fora do recinto escolar. A atividade consistia na resolução de desafios matemáticos simples. Com estes desafios era possível descobrir as coordenadas GPS do próximo local para onde se deveriam deslocar, e assim descortinariam o caminho a percorrer. Foi uma atividade que teve uma forte adesão por parte dos alunos, cerca de 300 alunos participaram.
No dia 14 de Março comemora-se mundialmente o dia do PI, e nós não quisemos que este dia passasse despercebido. Com o intuito de despertar a curiosidade dos alunos, o núcleo de estágio organizou um conjunto de atividades que visaram dar maior conhecimento deste número notável e mostrar algumas curiosidades que o envolvem. Destacam-se a projeção de alguns vídeos sobre a história e as aplicações do Pi e uma exposição de cartazes com algumas curiosidades sobre o Pi. Deste modo foi possível levar os alunos a olhar para o Pi de um modo diferente.
No "Dia dos Departamentos", o núcleo de estágio recorrendo a material elementar, nomeadamente, fósforos, caricas, joaninhas, moedas, etc… elaborou uma exposição interativa com quebra-cabeças matemáticos. De um modo geral os alunos aderiram de forma entusiástica e muito positiva a estes "jogos".

Ao longo do ano letivo procurei assistir às diversas reuniões, assim estive presente nas reuniões de departamento; nas reuniões de avaliação intercalar e em reuniões de avaliação. A participação nestas permitiu-me perceber que o trabalho de professor vai muito para além do "dar aulas" e que existe um trabalho que é feito "nos bastidores".

Durante a prática de ensino supervisionada lecionei um total de 9 aulas, distribuídas ao longo dos 3 períodos. O processo de ensino-aprendizagem é um trabalho rigoroso, objetivo e exigente. A todo custo devem ser evitados erros e deve-se garantir a máxima qualidade, logo é essencial iniciar todo este processo pelo planeamento. Assim, antes da lecionação das aulas decorreu um processo de planificação, existindo um período de pesquisa e de investigação em diversas fontes de informação, particularmente nas orientações metodológicas aconselhadas pelo Ministério de Educação e no manual adotado.
Na realização das planificações foi tido em consideração o teor e rigor científico. Salienta-se também que durante a elaboração das planificações, um dos aspetos tidos em conta foram as características gerais das turmas, adequando-se as estratégias aos conteúdos programáticos e aos objetivos.

As planificações foram verificadas pela professora orientadora cooperante e pela professora orientadora científica. Foram um bom elemento de debate entre mim e as orientadoras que contribuíram com sugestões oportunas baseadas nas suas experiências.

Tentei sempre preparar aulas com componente teórica e prática, diversificar ao máximo os recursos utilizados na sala de aula. Sempre que possível e que se julgou adequado recorri ao uso de ferramentas tecnológicas. De uma forma geral foram utilizadas ferramentas como o software Geogebra projetado no quadro, a máquina de calcular, o manual adotado e em algumas ocasiões, fichas de reforço das aprendizagens e apresentações PowerPoint.

A abordagem a cada tema foi iniciada questionando os alunos, aliciando e levando o aluno à descoberta. A resolução de exercícios foi uma técnica usada para averiguar e consolidar a aprendizagem dos conteúdos abordados no decorrer da aula.

É importante realçar que na turma de 9º ano, em consequência da faixa etária, as atitudes e o comportamento dos alunos podem por vezes sobrepor-se ao conteúdo da aula. Exige assim por parte do professor uma dedicação redobrada, uma predisposição para formar, uma atenção especial para os problemas comportamentais e de aprendizagem. São aulas menos previsíveis o que exige do docente uma preparação a diversos níveis. No entanto, apesar do esforço constante, no final sentimo-nos mais recompensados e realizados a nível profissional sempre que se consegue conquistar a atenção de um aluno para a aprendizagem.

## 3.3 Planificações

Apresento de seguida um conjunto de 6 aulas respeitantes a vários períodos de lecionação. Como o tema do trabalho científico é a trigonometria escolhi as aulas que vão mais de encontro a este.

### 3.3.1 Planificação 1

---

**Unidade Didática 4: Circunferência**

---

**Aula nº** 83 e 84
**Data:** 9 de janeiro de 2014
**Ano|Turma:** 9ºB
**Duração da Aula:** 90 minutos

---

**Tópico:**
- Ângulo excêntrico: ângulo inscrito e ângulos com o vértice no interior e no exterior do círculo.

**Sumário:**
Ângulo inscrito na circunferência.
Ângulos com o vértice no interior e no exterior do círculo.
Resolução de exercícios.

**Pré-requisitos:**
- Identificar elementos da circunferência (centro, raio, arco, corda).
- Identificar ângulos verticalmente opostos.
- Definir e identificar ângulos ao centro.
- Relacionar a amplitude de um ângulo ao centro com a do arco correspondente.
- Relacionar ângulos ao centro, arcos e cordas correspondentes.

### Objetivos:

No final da aula, os alunos devem saber:
- Definir e identificar ângulos inscritos na circunferência.
- Comparar a amplitude do ângulo inscrito com a amplitude do arco compreendido entre os seus lados.
- Distinguir ângulo excêntrico exterior de ângulo excêntrico interior.
- Determinar a amplitude de ângulos excêntricos.
- Utilizar as propriedades das figuras geométricas em demonstrações simples.

### Competências Transversais:

Nesta aula é possível desenvolver a Comunicação Matemática oral nas possíveis discussões geradas não só em torno da matéria a lecionar, como também através dos exercícios a resolver.

### Materiais e Recursos:

- Manual adotado: Novo Espaço Parte 2 - Matemática 9º Ano [4]
- Quadro Branco
- Marcadores: preto, azul, vermelho
- Quadro interativo
- Vídeo projetor
- Computador
- Geogebra

**Nota:**

▷ As indicações Praticar ____ referenciam os exercícios que o professor deve resolver.

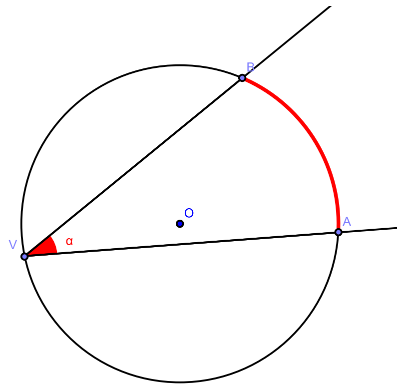
### Desenvolvimento da aula/Estratégias:

Inicia-se a aula escrevendo o sumário no quadro.

O professor questiona os alunos sobre o que entendem por ângulo excêntrico. O professor deve relembrar os alunos que se fala de ângulos associados a uma circunferência. Depois de um pequeno debate, o professor deverá conduzir os alunos à definição seguinte:

Um ângulo diz-se **excêntrico a uma circunferência** quando não tem o vértice no centro da circunferência.
Os alunos devem registar a definição no caderno diário.

Em seguida é pedido aos alunos que observem a seguinte figura:




São colocadas aos alunos as seguintes questões:
–> qual o vértice do ângulo alfa?
–> quais os lados desse ângulo?
–> em relação à circunferência como se chamam esse lados?
–> onde se encontra o vértice do ângulo AVB?

Através das respostas às questões anteriores, concluir que o ângulo AVB tem o vértice sobre a circunferência e os lados contêm cordas dessa circunferência. Ao ângulo com estas caraterísticas chama-se ângulo inscrito.

Os alunos registam no caderno diário a seguinte definição:
**Ângulo Inscrito -** é um ângulo excêntrico que contém o vértice sobre a circunferência e cujos lados são cordas dessa circunferência.

Os alunos serão questionados sobre a existência de dúvidas.

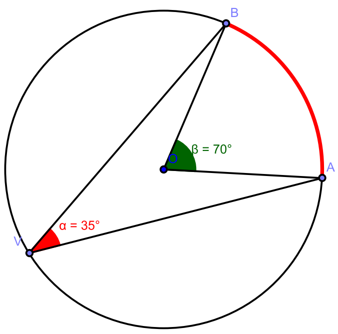
Em seguida, recorrendo ao Geogebra, mostrar aos alunos que se movermos o vértice V a amplitude do ângulo se mantém. Verificar o que acontece no caso em que o diâmetro é o lado oposto ao vértice no triângulo com lados nas cordas que dele partem.

Depois pedir aos alunos para registar a seguinte propriedade:
- Todos os ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência têm a mesma amplitude.

Em seguida é colocada a seguinte questão:

Como calcular a amplitude de um ângulo inscrito na circunferência?

Para responder à questão colocada, vai-se recorrer ao programa Geogebra e apresentar situações de ângulos ao centro e ângulos inscritos na circunferência.




Através da imagem dinâmica anterior, alterar a amplitude do arco AB e comparar com a amplitude do ângulo ADB. Questionam-se os alunos , se vêem alguma relação entre a amplitude destes dois ângulos,estabelecendo-se assim uma conjetura que relacione a medida da amplitude de um ângulo inscrito com a medida da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

Os alunos irão registar no caderno diário a seguinte propriedade:

A amplitude de um ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados: $\angle AVB = \frac{\widehat{AB}}{2}$

De seguida, o professor pede aos alunos para resolver os exercícios 8, 9 e 11 do manual [4]

## Praticar

**Resolução do Exercício 8:**
**8.1** Por exemplo corda DC ou corda BC
**8.2** $\angle AOB$
**8.3** $\angle DCB$

**Resolução do Exercício 9:**
**9.1** O triângulo é isósceles. $[AO]$ e $[OC]$ são raios da circunferência, logo estes segmentos de reta têm o mesmo comprimento e, portanto temos dois lados iguais, ou seja, temos um triangulo isósceles.

**9.2**
**9.2.1** $\angle AOB = 50^\circ$

**9.2.2** $\angle COA = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

**9.2.3** $\angle ACB = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$

**Resolução do Exercício 11:**
**Nota:** Um polígono regular tem os lados todos com o mesmo comprimento e os ângulos internos com a mesma amplitude.

**11.1** $\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{6^\circ} = 60^\circ$

**11.2** $\angle AED = \dfrac{\widehat{DA}}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

**11.3** $\angle DCB = \angle DCO + \angle BCO \iff \angle DCB = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

**11.4** $\angle PBC = 180 - 120 = 60^\circ$

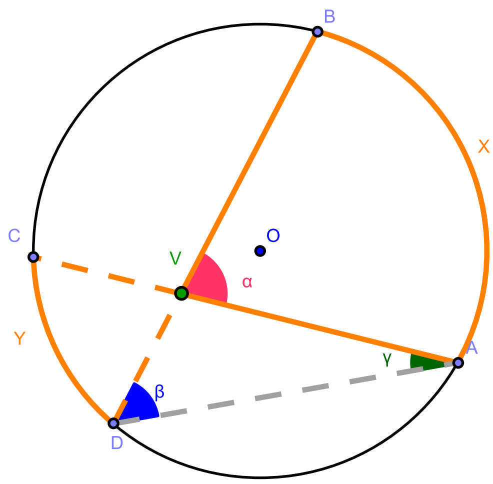
---

Corrigir os exercícios propostos e averiguar se os alunos têm dúvidas.

Propor aos alunos a resolução da Tarefa 4 da página 18 do manual [4].
Começamos pela resolução do exercício 1 da tarefa 4.

---

Considerando os dados do problema sabemos que $\widehat{AB} = x$ e $\widehat{CD} = y$.
E queremos provar que $\angle AVB = \dfrac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$




Aconselhar os alunos que, sempre que um exercício contenha uma sugestão, esta deve ser seguida, pois, por norma, estas sugestões conduzem-nos à solução do problema/exercício.

A resolução deste exercício é feita pelo professor no quadro mas, sempre com a ajuda e intervenção dos alunos.
Considerando a 1ª sugestão, exprimir $\angle ADB$ em função de x:

$$\angle ADB = \frac{x}{2}$$

De seguida exprimir o $\angle CAD$ em função de y e assim temos que:

$$\angle CAD = \frac{y}{2}$$

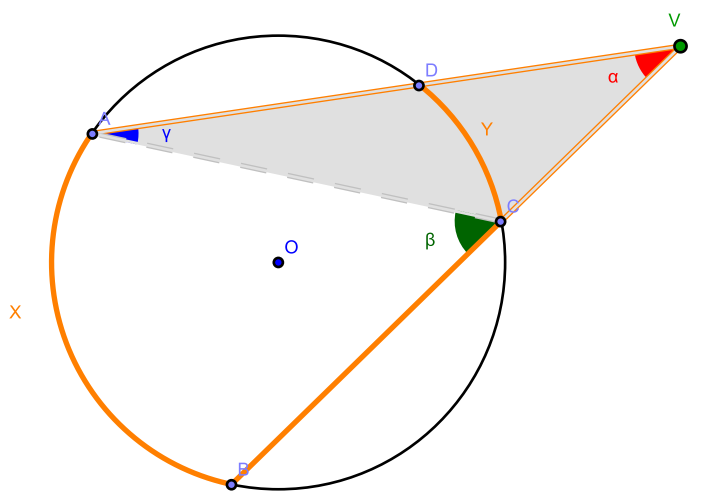
A 3ª sugestão pede-nos para relacionar a amplitude do ângulo externo de vértice V com as amplitudes dos ângulos internos de vértice A e B.

Recordar os alunos que já estudaram que:
'A amplitude do ângulo externo de um triângulo é igual à soma da amplitude dos dois ângulos opostos internos'

Assim,

$\angle AVB = ADB + \angle CAD$
$\Leftrightarrow \angle AVB = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2}$
$\Leftrightarrow \angle AVB = \dfrac{\widehat{AB}}{2} + \dfrac{\widehat{CD}}{2}$
$\Leftrightarrow \angle AVB = \dfrac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}$

De modo análogo, iremos fazer o exercício dois da tarefa 4. O professor resolve-o no quadro com a ajuda dos alunos.




Considerando os dados do problema sabemos que $\widehat{AB} = x$ e $\widehat{CD} = y$.
E queremos provar que $\angle AVB = \dfrac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$

Se sabemos que 'A amplitude do ângulo externo de um triângulo é igual à soma da amplitude dos dois ângulos opostos internos' como já referimos anteriormente. Então $\angle BCA = \angle BVA + \angle CAV$

Observando a figura, podemos verificar que temos dois ângulos inscritos na circunferência, o $\angle BCA$ e $\angle CAV$. Assim, podemos escrever que: $\angle BCA = \dfrac{x}{2}$ e $\angle CAV = \dfrac{y}{2}$

Então se $\angle BCA = \angle BVA + \angle CAV$, substituindo por o que conhecemos vem que:

$\dfrac{x}{2} = \angle BVA + \dfrac{y}{2}$

$$\Leftrightarrow \angle BVA = \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$$
$$\Leftrightarrow \angle BVA = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \angle BVA = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

---

Pedir aos alunos para resolver o exercício 14 do manual [4], da página 18.

**Praticar**

**Resolução do Exercício 14:**
**14.1** $\angle ADV = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

$\angle DVA = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$

Como a soma da amplitude dos ângulos internos de um triângulo é $180^\circ$ então $\angle VAD = 180^\circ - (30^\circ + 132^\circ) = 180^\circ - 162^\circ = 18^\circ$

**14.2** Como o ângulo com vértice interior ao círculo é a metade da soma das amplitudes do arco

maior com o arco menor, então

$\angle CVD = \dfrac{\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{CD}}{2} \Leftrightarrow 48^\circ = \dfrac{60^\circ + \overset{\frown}{CD}}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 96^\circ - 60^\circ \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 36^\circ$

---

Corrigir o exercício 14 e verificar se existem dúvidas.

Por fim, é proposto o exercício 15 da página 18 do manual [4] para trabalho de casa.

**Trabalho de casa**
- Exercício 15 da página 18.

**Praticar**

**Resolução do Exercício 15:**
Como o $\angle CAD$ é um ângulo inscrito na circunferência, então $\overset{\frown}{CD} = 2 \times 15^\circ = 30^\circ$
O $\angle ACB$ é um ângulo externo do triângulo AVC e por isso, a amplitude do $\angle ACB$ é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.
Assim, $\angle ACB = \angle CAD + \angle AVB$ $\angle ACB = 15^\circ + 25^\circ$ $\angle ACB = 40^\circ$
Como o $\angle ACB$ é um ângulo inscrito na circunferência, o arco AB é o dobro da sua amplitude,

logo
$\overset{\frown}{AB} = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$

Temos então que

$$\angle AVC = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} \Leftrightarrow 25^\circ = \frac{80^\circ - 30^\circ}{2} \Leftrightarrow 25^\circ = \frac{50^\circ}{2} \Leftrightarrow 25^\circ = 25^\circ$$

Tal como se pretendia demonstrar.

---

**Avaliação:**

- empenho nas atividades propostas;
- cooperação com os colegas e professor;
- aplicação dos conhecimentos matemáticos;
- raciocínio matemático;
- comunicação matemática;
- uso da terminologia e da simbologia adequada;
- Comportamento na sala de aula.

**Referências:**

[4],[13]

### 3.3.2 Planificação 2

---

## Tema III: Trigonometria

---

**Aulas nº** 149 e 150
**Data:** 2 de abril de 2014
**Ano|Turma:** 12ºA
**Duração da Aula:** 90 minutos

---

**Tópico:**

Noções de trigonometria abordadas no 11ºano, nomeadamente:

- razões trigonométricas num triângulo retângulo;
- ângulos de sentido positivo e de sentido negativo;
- ângulo generalizado e arco generalizado;
- nova definição de seno, de cosseno e de tangente;
- relações entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo;
- o radiano;
- relações entre senos, cossenos e tangentes de ângulos complementares, suplementares, simétricos, que diferem de $\pi$ e de $\frac{\pi}{2}$ e cuja soma ou diferença é $\frac{3\pi}{2}$;
- equações trigonométricas.

**Sumário:**

Conceitos elementares de trigonometria - revisões do 11ºano.

**Pré-requisitos:**
Trigonometria do tema 'Geometria no Plano e no Espaço II' do 11ºano.

**Objetivos:**
No final da aula, os alunos devem saber:
- usar o triângulo retângulo para escrever as razões trigonométricas;
- usar a trigonometria para resolver problemas que envolvem triângulos retângulos;
- usar as razões trigonométricas para qualquer ângulo;
- usar o sinal das razões trigonométricas;
- verificar identidades trigonométricas aplicando fórmulas trigonométricas;
- conhecer as razões trigonométricas de ângulos de referência;
- reduzir um ângulo ao 1º quadrante;
- resolver equações e inequações trigonométricas.

**Competências Transversais:**
Nesta aula é possível desenvolver a Comunicação Matemática oral nas possíveis discussões geradas não só em torno da matéria a lecionar, como também através dos exercícios a resolver.

**Materiais e Recursos:**
- Manual adotado: Xeqmat12 Volume 3 - Matemática A 12º Ano [25]
- Quadro Branco
- Marcadores: preto, azul, vermelho
- Quadro interativo
- Vídeo projetor
- Computador
- Ficha de trabalho para resolver durante a aula (*FT_trigonometria.pdf* e *Resolução_FT_trigonometria.pdf*)
- Ficheiro *Aula5_trigonometria.ppt*

**Notas:**

- ▻ As indicações Praticar ____ referenciam os exercícios que o professor deve resolver.
- ▻ A indicação *diapositivo_x*, representa o número do diapositivo da apresentação eletrónica, do ficheiro Aula5_trigonometria.ppt, ficheiro auxiliar que o professor usará.

**Desenvolvimento da aula/Estratégias:**
Inicia-se a aula escrevendo o sumário no quadro.

O professor questiona os alunos sobre o que entendem por triângulo retângulo e que razões trigonométricas é que conhecem. Com os alunos o professor deve relacionar as razões trigonométricas com o triângulo retângulo. O professor apresenta estas relações *diapositivo_2*.
Em seguida, os alunos são questionados em relação ao sentido dos ângulos, o professor pode colocar a seguinte questão: quantos sentidos pode ter um ângulo?
Depois da participação dos alunos, o professor exibirá o *diapositivo_3*.
Em simultâneo com os alunos, o professor recorda os conceitos de ângulo e arco generalizado; definição de seno, cosseno e tangente no círculo trigonométrico e o sinal das razões trigonométricas nos diferentes quadrantes, *diapositivo_4*,*diapositivo_5*,*diapositivo_6*, respetivamente.

Depois o professor relembra os alunos, as relações entre o seno, o cosseno e a tangente de um mesmo ângulo *diapositivo_7*. O professor alerta para a importância destas relações. Uma vez que estas permitem calcular o valor exato das restantes razões trigonométricas de um ângulo, conhecendo apenas uma delas. As fórmulas são exibidas no quadro interativo *diapositivo_8*.
É pedido aos alunos que realizem o exercício 4, alínea b) e d) da página 10 do manual [25].

## Praticar

**Resolução do Exercício 4:**
**b)**

$$1-\frac{cos^2\theta}{1+sen\,\theta}=sen\,\theta$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{(1-sen^2\theta)}{1+sen\,\theta}=sen\,\theta$$
$$\Leftrightarrow \frac{1+sen\,\theta-1+sen^2\theta}{1+sen\,\theta}=sen\,\theta$$
$$\Leftrightarrow \frac{sen\,\theta+sen^2\theta}{1+sen\,\theta}=sen\,\theta$$
$$\Leftrightarrow \frac{sen\,\theta(1+sen\,\theta)}{1+sen\,\theta}=sen\,\theta$$
$$\Leftrightarrow sen\,\theta=sen\,\theta$$

**d)**

$$\frac{(1-cos\,x)(1+cos\,x)}{cos^2x}=tg^2x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1-cos^2x}{cos^2x}=tg^2x$$
$$\Leftrightarrow \frac{sen^2x}{cos^2x}=tg^2x$$
$$\Leftrightarrow tg^2x=tg^2x$$

---

É dado algum tempo aos alunos, para que resolvam de forma autónoma os exercícios. Corrigir os exercícios propostos e averiguar se os alunos têm dúvidas.

Em seguida, o professor recorda com os alunos o conceito de radiano e do valores exatos das razões trigonométricas $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, *diapositivo_7 − 8*. Propor aos alunos a resolução do exercício 6, alínea a), b), c) e d) da página 11 do manual [25].
A resolução deste exercício é efetuada pelo professor no quadro, mas sempre com a ajuda e intervenção dos alunos.

## Praticar

**Resolução do Exercício 6:**

**a)** $sen\,\pi+sen\,\frac{3\pi}{2}=0-1=-1$

**b)** $sen\,\frac{\pi}{4} + cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

**c)** $tg\,\frac{\pi}{4} + tg\,\frac{3\,\pi}{4} = 1 + (-1) = 0$

**d)** $sen\,\frac{\pi}{3} \times cos\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3})^{\,2}}{4} = \frac{3}{4}$

---

Logo depois são revistas as relações entre senos, cossenos e tangentes de ângulos complementares, suplementares, simétricos, que diferem de $\pi$ e de $\frac{\pi}{2}$ e cuja soma ou diferença é:$\frac{3\pi}{2}$.

Para recordar as relações trigonométricas dos ângulos: $-\alpha$; $\pi - \alpha$; $\pi + \alpha$; $\frac{\pi}{2} - \alpha$; $\frac{\pi}{2} + \alpha$; $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ e $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ é usada a apresentação eletrónica, nomeadamente os *diapositivos*_10 − 16.

Pedir aos alunos para resolver o exercício 7 do manual [25], da página 12.

## Praticar

**Resolução do Exercício 7:**

$$sen\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow -cos\,x = \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow cos\,x = -\frac{1}{3}$$

$sen^{\,2}\,x + cos^{\,2}\,x = 1$, sendo $cos\,x = -\frac{1}{3}$, tem-se que:

$$sen^{\,2}\,x = 1 - cos^{\,2}\,x \Leftrightarrow sen^{\,2}\,x = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{\,2}$$
$$\Leftrightarrow sen^{\,2}\,x = 1 - \frac{1}{9}$$
$$\Leftrightarrow sen^{\,2}\,x = \frac{9}{9} - \frac{1}{9}$$
$$\Leftrightarrow sen^{\,2}\,x = \frac{8}{9}$$
$$\Leftrightarrow sen\,x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$$
$$\Leftrightarrow sen\,x = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$$

Como $x \in ]\pi, 2\pi[$, tem-se $sen\,x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$. Então,

$$cos(\pi + x) - 2cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -cos\,x - 2(-sen\,x)$$
$$= -cos\,x + 2sen\,x$$
$$= -\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{8}}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{8}}{3}$$
$$= \frac{1 - 2\sqrt{8}}{3}$$

Corrigir o exercício 7 e verificar se existem dúvidas.

Seguidamente são recordadas as equações trigonométricas. O professor recorda os alunos que uma equação trigonométrica é uma equação em que a variável está associada a uma expressão trigonométrica. Com o auxilio do *diapositivo_17*, da apresentação eletrónica, são exibidas no quadro interativo as equações trigonométricas e as suas equivalências.

De seguida, é proposto o exercício 8, alínea c), d) e i) da página 13 do manual [25].

**Praticar**

**Resolução do Exercício 8:**

**c)**

$$4 + 8\,sen\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\left(sen\frac{x}{2}\right) = -4$$

$$\Leftrightarrow sen\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{4}{8}$$

$$\Leftrightarrow sen\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow sen\left(\frac{x}{2}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \frac{x}{2} = -\frac{5\,\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2\,\pi}{6} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{10\,\pi}{6} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{5\,\pi}{3} + \frac{2\,\pi}{6} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**d)**

$$\frac{cos\ a}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{cos\ a}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow cos\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow cos\ a = cos\frac{3\,\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3\,\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee a = -\frac{3\,\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**i)**

$$cos\,x + cos\,x^{\,2} = 0$$
$$\Leftrightarrow cos\,x(1 + cos\,x) = 0$$
$$\Leftrightarrow cos\,x = 0 \vee 1 + cos\,x = 0$$
$$\Leftrightarrow cos\,x = cos\frac{\pi}{2} \vee cos\,x = -1$$
$$\Leftrightarrow cos\,x = cos\frac{\pi}{2} \vee cos\,x = cos\,\pi$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

---

Corrigir o exercício proposto e averiguar se os alunos têm dúvidas.
Depois o professor distribui uma ficha de trabalho aos alunos, FT_trigonometria.pdf.
A resolução é iniciada logo após que o professor termine a distribuição a ficha de trabalho. A resolução é efetuada no quadro pelo professor e/ou alunos.

**Avaliação:**
- empenho nas atividades propostas;
- cooperação com os colegas e professor;
- aplicação dos conhecimentos matemáticos;
- raciocínio matemático;
- comunicação matemática;
- uso da terminologia e da simbologia adequada;
- comportamento na sala de aula.

**Referências:**
[25], [10], [8]

### 3.3.3 Planificação 3

---

## Tema III: Trigonometria

---

**Aulas nº** 151 e 152
**Data:** 3 de abril de 2014
**Ano|Turma:** 12ºA
**Duração da Aula:** 90 minutos

---

**Tópico:**
Funções seno e cosseno como funções reais de variável real.

**Sumário:**
Estudo da função seno e cosseno.

**Pré-requisitos:**
Trigonometria do tema 'Geometria no Plano e no Espaço II' do 11º ano.

**Objetivos:**
No final da aula, os alunos devem saber:
- definir a função seno e cosseno como função real de variável real;
- representar graficamente as funções trigonométricas;
- identificar as propriedades e as características da função seno e cosseno, nomeadamente: domínio, contradomínio, período, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assíntotas, limites nos ramos infinitos.

**Competências Transversais:**
Nesta aula é possível desenvolver a Comunicação e Raciocínio Matemático nas possíveis discussões geradas não só em torno da matéria a lecionar, como também através dos exercícios a resolver.

**Materiais e Recursos:**
- Manual adotado: Xeqmat12 Volume 3 - Matemática A 12º Ano [25]
- Quadro Branco
- Marcadores: preto, azul, vermelho
- Quadro interativo
- Vídeo projetor
- Computador
- Geogebra
- Ficheiro *Aula6_Fseno_cosseno.ppt*
- Ficheiro *Tabela_propriedades_seno_cosseno.doc*
- Ficheiros Geogebra: *f_seno.ggb e f_cosseno.ggb*, retirados do portal www.geogebra.org, sendo o autor: Adilson Vilas Boas.

**Notas:**

- ▻ As indicações Praticar ____ referenciam os exercícios que o professor deve resolver.
- ▻ A indicação *diapositivo_x*, representa o número do diapositivo da apresentação eletrónica, do ficheiro Aula6_Fseno_cosseno.ppt, ficheiro auxiliar que o professor usará.

**Desenvolvimento da aula/Estratégias:**
Inicia-se a aula escrevendo o sumário no quadro.

O professor recorda os alunos a definição $sen\ x = sen(x\ radianos)$ e $cos\ x = cos(x\ radianos)$ - *diapositivo_2*.
Assim, estas funções são funções de variável real a que usualmente designamos de funções trigonométricas. O professor alerta os alunos de que se são funções de variável real podem ser representadas graficamente num referencial.
É pedido aos alunos para usarem a sua máquina calculadora para procederem à representação gráfica destas funções. Depois dos alunos terem efetuado o pedido do professor, este confirma com os alunos a representação gráfica das funções utilizando o *diapositivo_4*.

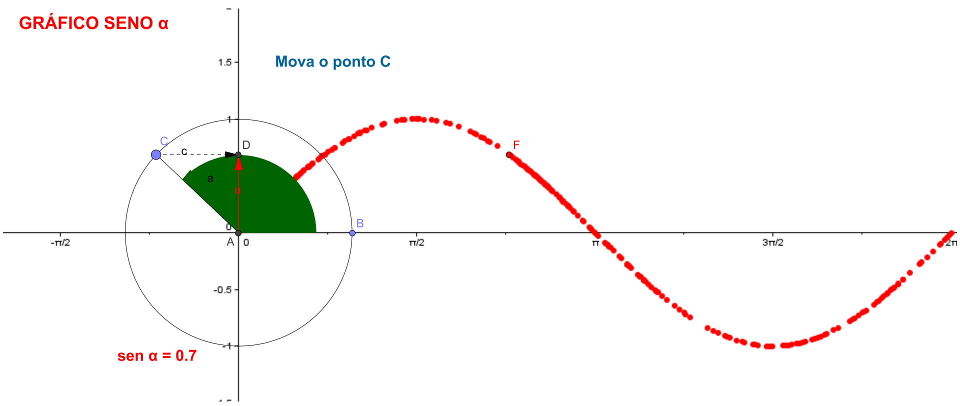
Em seguida, o professor em conjunto com os alunos, procede a uma análise da representação

gráfica da função do seno e cosseno. Os alunos são questionados sobre o facto de parecer existir um padrão no gráfico das funções.
Através das respostas dos alunos, concluir que as funções são periódicas e que têm de período $2\pi$. O professor refere que este é o período positivo mínimo.

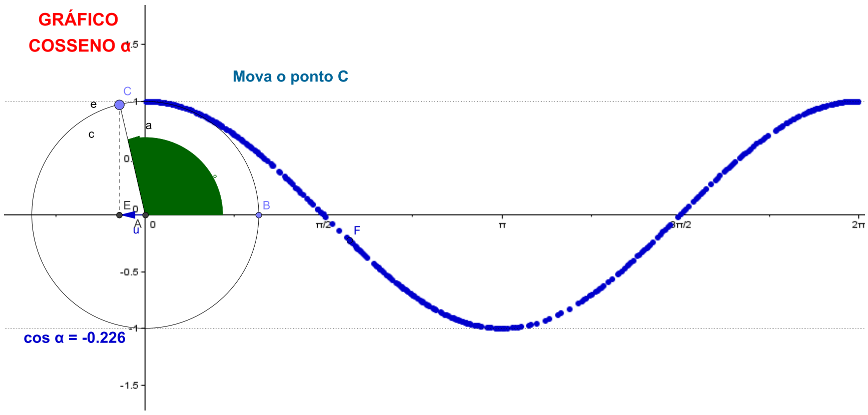
Analisar com os alunos situações do quotidiano que também são periódicas, no final pedir aos alunos que registem no caderno diário a definição de função periódica, *diapositivo_7*.

Depois o professor, recorrendo ao geogebra, explica aos alunos como surge a representação gráfica da função seno e posteriormente a representação gráfica da função cosseno.

**FUNÇÃO SENO**




**FUNÇÃO COSSENO**




Para uma melhor percepção da representação gráfica das duas funções em estudo o professor apresenta o *diapositivo_8*.

Seguidamente o professor questiona os alunos acerca do domínio das funções representadas graficamente; qual o contradomínio e o período. Depois de os alunos responderem dá-se início, à construção de um quadro resumo sobre as propriedades da função seno e cosseno.

O quadro é preenchido (elaborado) mediante questões formuladas pelo professor aos alunos.
O professor utiliza o ficheiro auxiliar *Tabela_propriedades_seno_cosseno.pdf*, para projetar no quadro interativo cada propriedade encontrada. Á medida que cada propriedade é encontrada é

pedido aos alunos para a registarem no caderno diário.

O professor terá em conta as propriedades seguintes: domínio, contradomínio, período, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assíntotas, limites nos ramos infinitos.

No final de elaborar o quadro com as propriedades da função seno e cosseno, propor aos alunos a resolução do exercício 16, alínea a) e c) da página 20 do manual [25].

### Praticar

**Resolução do Exercício 16:**

Para a resolução deste exercício foram escolhidas duas sucessões que tendem para infinito.

**a) Usa a definição de limite segundo Heine e as sucessões** $u_n = \frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,n$ **e** $v_n = \pi\,n$ **para provar que não existe** $\lim\limits_{x \to +\infty} sen\,x$

$u_n = \frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,n$
$v_n = \pi\,n$

$u_n$ é uma sucessão de termos pertencentes ao domínio do $sen\,x$ $(\mathbb{R})$ tal que $lim(u_n) = +\infty$

$lim\; sen(u_n) = lim\; sen\left(\frac{\pi}{2} + 2\,\pi\,n\right) = 1$

$v_n$ é uma sucessão de termos pertencentes ao domínio do $sen\,x$ $(\mathbb{R})$ tal que $lim(v_n) = +\infty$

$lim\; sen\,(v_n) = lim\; sen\,(\pi\,n) = 0$

Como $sen\,(u_n)$ e $sen\,(v_n)$ tem limites diferentes, sendo $u_n$ e $v_n$ duas sucessões que tendem para $+\infty$, não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} sen\,x$

**b) Prova que não existe** $\lim\limits_{x \to -\infty} sen\,x$
Sejam $u_n = \frac{\pi}{2} - 2\,\pi\,n$ e $v_n = \frac{3\,\pi}{2} - 2\,\pi\,n$.

$u_n$ é uma sucessão de termos pertencentes ao domínio do $sen\,x$ $(\mathbb{R})$ tal que $lim(u_n) = -\infty$

$lim\; sen(u_n) = lim\; sen\left(\frac{\pi}{2} - 2\,\pi\,n\right) = 1$

$v_n$ é uma sucessão de termos pertencentes ao domínio do $sen\,x$ $(\mathbb{R})$ tal que $lim(v_n) = -\infty$

$lim\; sen\,(v_n) = lim\; sen\,(\frac{3\,\pi}{2} - 2\,\pi\,n) = -1$

Como $sen\,(u_n)$ e $sen\,(v_n)$ tem limites diferentes, sendo $u_n$ e $v_n$ duas sucessões que tendem para $-\infty$, não existe $\lim\limits_{x \to -\infty} sen\,x$

É dado algum tempo aos alunos, para que resolvam de forma autónoma o exercício. A resolução deste exercício é efetuada pelo professor e/ou alunos no quadro e averigua-se se os alunos têm dúvidas.

### Avaliação

- empenho nas atividades propostas;
- cooperação com os colegas e professor;
- aplicação dos conhecimentos matemáticos;
- raciocínio matemático;
- comunicação matemática;
- uso da terminologia e da simbologia adequada;
- comportamento na sala de aula.

### Referências

[25], [10], [8]

## 3.3.4 Planificação 4

---

### Tema III: Trigonometria

---

**Aulas nº** 153 e 154
**Data:** 22 de abril de 2014
**Ano|Turma:** 12ºA
**Duração da Aula:** 90 minutos

---

### Tópico

Funções seno e cosseno como funções reais de variável real.

### Sumário

Resolução de exercícios sobre a função seno e cosseno.

### Pré-requisitos

- trigonometria do tema 'Geometria no Plano e no Espaço II' do 11º ano;
- propriedades da função seno e cosseno.

### Objetivos

No final da aula, os alunos devem saber:
- definir a função seno e cosseno como função real de variável real;
- representar graficamente as funções trigonométricas;
- identificar as propriedades e as características da função seno e cosseno, nomeadamente: domínio, contradomínio, período, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assíntotas, limites nos ramos infinitos.

### Competências Transversais

Nesta aula é possível desenvolver a capacidade de resolução de problemas e o raciocínio matemático. Promover a comunicação matemática, através da discussão dos exercícios apresentados.

## Materiais e Recursos

- Manual adotado: Xeqmat12 Volume 3 - Matemática A 12º Ano [25]
- Quadro Branco
- Marcadores: preto, azul, vermelho
- Quadro interativo
- Computador

**Notas:**

▷ As indicações Praticar ____ referenciam os exercícios que o professor deve resolver.

▷ A indicação *diapositivo_x*, representa o número do diapositivo da apresentação eletrónica, do ficheiro Aula6_Fseno_cosseno.ppt, ficheiro auxiliar que o professor usará.

## Desenvolvimento da aula/Estratégias

Inicia-se a aula escrevendo o sumário no quadro.

É proposto aos alunos a resolução do exercício 16, alínea c) da página 20 do manual [25].

### Praticar

**Resolução do Exercício 16:**

Para a resolução deste exercício foram escolhidas duas sucessões que tendem para infinito.

**c) Prova que não existe** $\lim\limits_{x \to +\infty} cos\, x$

Sejam $u_n = 2\,\pi\,n$ e $v_n = \pi + 2\,\pi\,n$.

$u_n$ é uma sucessão de termos pertencentes ao domínio do $cos\, x$ ($\mathbb{R}$) tal que $lim(u_n) = +\infty$

$lim\, cos(u_n) = lim\, cos\, 2\,\pi\,n = 1$

$v_n$ é uma sucessão de termos pertencentes ao domínio do $cos\, x$ ($\mathbb{R}$) tal que $lim(v_n) = +\infty$

$lim\, cos\,(v_n) = lim\, cos\,(\pi + 2\,\pi\,n) = -1$

Como $cos\,(u_n)$ e $cos\,(v_n)$ tem limites diferentes, sendo $u_n$ e $v_n$ duas sucessões que tendem para $+\infty$, não existe $\lim\limits_{x \to +\infty} sen\, x$

---

É dado algum tempo aos alunos, para que resolvam o exercício proposto. Corrige-se o exercício proposto e averigua-se se os alunos têm dúvidas.

Em seguida, pede-se aos alunos a resolução do exercício 17, alínea a) e c) e exercício 18 da página 20 do manual [25].
A resolução destes exercícios é efetuada pelo professor e/ou alunos no quadro.

**Resolução do Exercício 17:**

**Indica uma expressão geral dos zeros das funções definidas, em $\mathbb{R}$, por:**
**a)**

$2\,sen\,x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2\,sen\,x = 1$
$\Leftrightarrow sen\,x = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow sen\,x = sen\,\frac{\pi}{6}$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5\,\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**c)**
$cos(\pi\,t) = 0$
$\Leftrightarrow cos(\pi\,t) = cos\frac{\pi}{2}$
$\Leftrightarrow \pi\,t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee \pi\,t = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2\,\pi} + \frac{2k\pi}{\pi}, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{\pi}{2\,\pi} + \frac{2k\pi}{\pi}, k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$

**Resolução do Exercício 18:**

**Estuda a paridade das funções definidas, em $\mathbb{R}$, por:**

Para a resolução do exercício é usada a definição:
A função é par se $f(x) = f(-x), \forall x, -x \in \mathbb{R}$
A função é ímpar se $f(-x) = -f(x), \forall x, -x \in \mathbb{R}$

**a)**
$x \hookrightarrow cos\,x + sen\,x$
$cos\,x + sen\,x = cos(-x) + sen(-x)$
$\Leftrightarrow cos\,x + sen\,x = cos\,x - sen\,x$
$\Leftrightarrow cos\,x + sen\,x - cos\,x + sen\,x = 0$
$\Leftrightarrow sen\,x + sen\,x = 0$
$\Leftrightarrow 2sen\,x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, falso

$cos(-x) + sen(-x) = -cos\,x - sen\,x$
$\Leftrightarrow cos\,x - sen\,x = -cos\,x - sen\,x$
$\Leftrightarrow cos\,x - sen\,x + cos\,x + sen\,x = 0$

$\Leftrightarrow 2cos\, x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, falso

Logo a função não é par nem ímpar.

**b)**

$t \hookrightarrow sen\left(\dfrac{t}{2}\right)$

$sen\left(-\dfrac{t}{2}\right) = -sen\left(\dfrac{t}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$

Logo a função é ímpar.

**c)**

$x \hookrightarrow x + cos\, x$

$x + cos\, x = -x + cos(-x)$

$\Leftrightarrow x + cos\, x = -x + cos\, x$

$\Leftrightarrow 2\,x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, falso

$-x + cos(-x) = -x - cos\, x$

$\Leftrightarrow -x + cos\, x = -x - cos\, x$

$\Leftrightarrow 2cos\, x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, falso

Logo a função não é par nem ímpar.

d)

$x \hookrightarrow sen\, x - x$

$sen\, x - x = sen(-x) - (-x)$

$\Leftrightarrow sen\, x - x = -sen\, x + x$

$\Leftrightarrow 2\, sen\, x - 2\,x = 0$

$\Leftrightarrow 2\, sen\, x = 2\,x$

$\Leftrightarrow sen\, x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, falso

$sen(-x) - (-x) = -(sen\, x - x)$

$\Leftrightarrow -sen\, x + x = -sen\, x + x,\ \forall x \in \mathbb{R}$, Verdadeiro

Logo a função é ímpar.

---

O professor verifica se existem dúvidas.

Pedir aos alunos para resolver o exercício 80, alínea a) do manual [**?**], da página 55.

## Praticar

**Resolução do Exercício 80:**

**Indica os zeros e as abcissas dos extremos de $x \hookrightarrow cos\, x$ nos intervalos:**

**a)** $[0, 2\,\pi]$

$x \curvearrowright cos\, x,\ [0, 2\,\pi]$

$cos\, x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$

Seja $k = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$

Seja $k = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\,\pi}{2}$

Logo os zeros são: $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\,\pi}{2}$

Minimizantes: $\pi + 2\,k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$

Seja k=0, $\pi, k \in \mathbb{Z}$

Maximizantes: $2\,k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$

Seja $k = 0, 2\,k\,\pi = 0, k \in \mathbb{Z}$

Seja $k = 1, 2\,k\,\pi = 2\,\pi, k \in \mathbb{Z}$

Logos os minimizantes são: $\pi$ ; e os maximizantes: $0\; e\; 2\,\pi$.

---

Corrige-se o exercício proposto e averigua-se se os alunos têm dúvidas.

### Avaliação

- empenho nas atividades propostas;
- cooperação com os colegas e professor;
- aplicação dos conhecimentos matemáticos;
- raciocínio matemático;
- comunicação matemática;
- uso da terminologia e da simbologia adequada;
- comportamento na sala de aula.

### Referências

[25], [8]

### 3.3.5 Planificação 5

**Unidade Didática 6:** Trigonometria

**Aulas nº** 139 e 140
**Data:** 14 de maio de 2014
**Ano|Turma:** 9ºB
**Duração da Aula:** 90 minutos

**Tópico:**
Razões trigonométricas num triângulo retângulo.

**Sumário:**
Resolução de exercícios sobre razões trigonométricas de ângulos agudos.

**Pré-requisitos:**
- Noção de ângulo agudo, amplitude de um ângulo e de triângulo retângulo;
- Identificar as razões trigonométricas de ângulos agudos de um triângulo retângulo;
- Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo dado como razões obtidas a partir de elementos de um triângulo retângulo.

**Objetivos:**
No final da aula, os alunos devem saber:
- Resolver exercícios utilizando razões trigonométricas em contextos variados.

**Competências Transversais:**
Nesta aula é possível desenvolver a Comunicação Matemática oral e o Raciocínio Matemático nas possíveis discussões geradas em torno da matéria a lecionar, como também através dos exercícios a resolver.

**Materiais e Recursos:**
- Manual adotado: Novo Espaço Parte 2 - Matemática 9º Ano [4]
- Quadro Branco
- Marcadores: preto, azul, vermelho
- Quadro interativo
- Vídeo projetor
- Computador
- Ficheiro *FT_trigonometria.pdf*

**Notas:**

▻ As indicações Praticar ____ referenciam os exercícios que o professor deve resolver.

**Desenvolvimento da aula/Estratégias:**
Inicia-se a aula escrevendo o sumário no quadro.

De seguida o professor projeta uma animação da escola virtual sobre a história da trigonometria. No final é referido pelo professor a importância da trigonometria nos dias de hoje e aspetos relevantes.

O professor recorda os alunos, projetando no quadro interativo, os critérios de semelhança de triângulos. Em seguida, o professor relembra a noção de triângulo retângulo e os diferentes elementos deste.

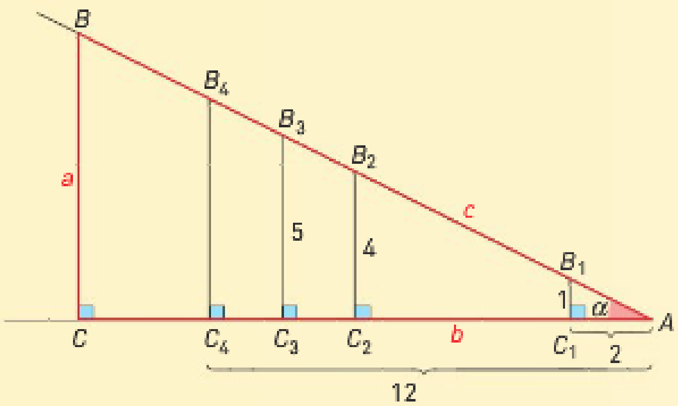
O professor propõe a resolução da tarefa 2 da página 88 do manual [4]. Com a resolução desta tarefa pretende-se que os alunos reconheçam as razões trigonométricas, como razões invariantes em triângulos retângulos semelhantes.
O professor inicia a leitura do enunciado da tarefa. Antes de os alunos iniciarem a resolução da tarefa o professor questiona os alunos se os triângulos que observam na figura são semelhantes entre si.

É pedido aos alunos para resolverem a tarefa 2. Aquando da resolução da tarefa por parte dos alunos, o professor deverá circular pela sala auxiliando os alunos na resolução da mesma.

---

**Tarefa 2**

Na figura abaixo estão representados vários triângulos retângulos.




Sabe-se que:

- $\overline{AB} = c$ ; $\overline{BC} = a$ ; $\overline{AC} = b$
- $\overline{AC_1} = 2$ ; $\overline{AC_4} = 12$
- $\overline{C_1B_1} = 1$ ; $\overline{C_2B_2} = 4$ ; $\overline{C_3B_3} = 5$
- O ângulo agudo que é comum a todos os triângulos é designado por $\alpha$ .

**Resolução do Tarefa 2:**

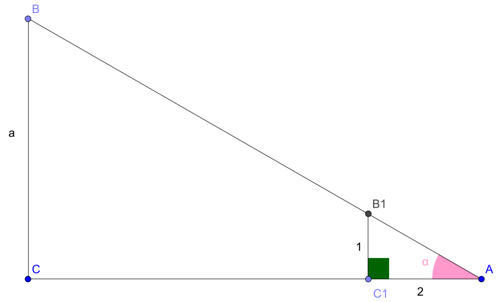
**1. Quantos triângulos retângulos estão apresentados na figura?**

Estão representados na figura 5 triângulos retângulos.

**2. Determina (valores exatos):**

**2.1.** $\overline{AB_1}$

Pretende-se determinar o comprimento do segmento $\overline{AB_1}$



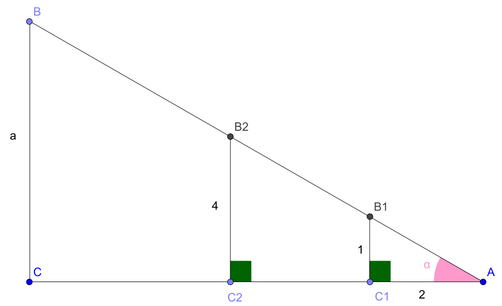

$\overline{AB_1}^{\,2} = \overline{AC_1}^{\,2} + \overline{B_1C_1}^{\,2}$

$\iff \overline{AB_1}^{\,2} = 2^{\,2} + 1^{\,2}$

$\iff \overline{AB_1}^{\,2} = 4 + 1, \ \overline{AB_1} > 0$

$\overline{AB_1} = \sqrt{5}$

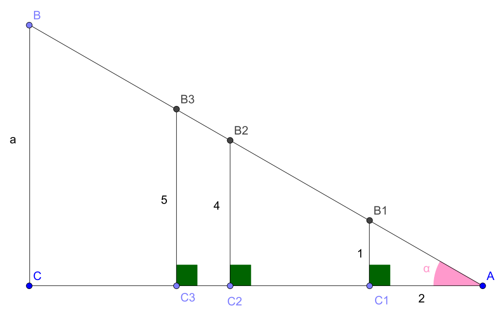
**2.2.** $\overline{AC_2}$ *e* $\overline{AB_2}$




$$\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{B_1C_1}} \iff \frac{\overline{AC_2}}{2} = \frac{4}{1} \iff \overline{AC_2} = \frac{4 \times 2}{1} \iff \overline{AC_2} = 8$$

$$\frac{\overline{AB_2}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{B_1C_1}} \iff \frac{\overline{AB_2}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{1} \iff \overline{AB_2} = 4\sqrt{5}$$

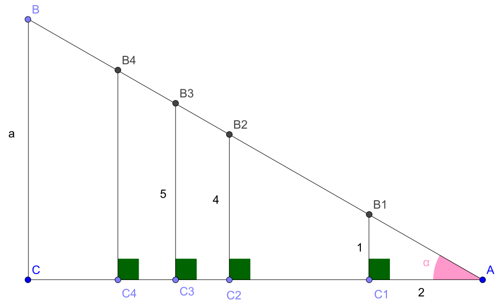
**2.3.** $\overline{AC_3}$ *e* $\overline{AB_3}$




$$\frac{\overline{AC_3}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{B_1C_1}} \iff \frac{\overline{AC_3}}{2} = \frac{5}{1} \iff \overline{AC_3} = 10$$

$$\frac{\overline{AB_3}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{B_1C_1}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{AB_3}}{\sqrt{5}} = \frac{5}{1} \Longleftrightarrow \overline{AB_3} = 5\sqrt{5}$$

**2.4.** $\overline{B_4C_4}$ e $\overline{AB_4}$




$$\frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC_4}}{\overline{AC_1}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{B_4C_4}}{1} = \frac{12}{2} \Longleftrightarrow \overline{B_4C_4} = \frac{12}{2} \Longleftrightarrow \overline{B_4C_4} = 6$$

$$\frac{\overline{AB_4}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_4}}{\overline{AC_1}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{AB_4}}{\sqrt{5}} = \frac{12}{2} \Longleftrightarrow \overline{AB_4} = \frac{12\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow \overline{AB_4} = 6\sqrt{5}$$

**3. Considera os resultados obtidos em 2.**

**3.1 Transcreve para o teu caderno a tabela seguinte e completa-a com os valores em falta**

| Triângulo | Ângulo α | | |
|---|---|---|---|
| | $\frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}}$ | $\frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}}$ | $\frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}$ |
| $AB_1C_1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{2}{\sqrt{5}}$ |
| $AB_2C_2$ | $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{4\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{8}{4\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ |
| $AB_3C_3$ | $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{5\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{10}{5\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ |
| $AB_4C_4$ | $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ | $\frac{6}{6\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{12}{6\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ |
| ABC | $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ | $\frac{a}{c}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{b}{c}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ |

**4. Admite que se constrói outro triângulo retângulo semelhante aos da figura. O que podes concluir quanto ao valor da razão entre:**

**4.1. o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo** $\alpha$

A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo $\alpha$ é $\frac{1}{2}$.

**4.2. o cateto oposto ao ângulo $\alpha$ e a hipotenusa**

A razão entre o cateto oposto ao ângulo $\alpha$ e a hipotenusa é $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

**4.3. o cateto adjacente ao ângulo $\alpha$ e a hipotenusa**

A razão entre o cateto adjacente ao ângulo $\alpha$ e a hipotenusa é $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

---

É dado algum tempo aos alunos, para que resolvam de forma autónoma o exercício. O professor inicia a correção da tarefa proposta no quadro.

No final da correção da tarefa professor auxiliar-se-à do programa de geometria dinâmica - Geogebra, para confirmar os valores obtidos na exercício 2 da tarefa e fazer conjeturas. E deste modo poder concluir que o valor da razão entre: o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo $\alpha$; o cateto oposto ao ângulo $\alpha$ e a hipotenusa e o cateto adjacente ao ângulo $\alpha$ e a hipotenusa depende apenas da amplitude do ângulo $\alpha$ e não do comprimento dos lados do triângulo.
O professor averígua se existem dúvidas.
Auxiliando-se da tarefa anterior o professor refere que em relação ao ângulo de vértice A de amplitude $\alpha$, podem ser consideradas razões trigonométricas. Nomeadamente, seno, cosseno e tangente. Com o auxilio do *diapositivo*_10 − 12, da apresentação eletrónica, são exibidas no quadro interativo as definições das razões trigonométricas. É pedido aos alunos que registem no seu caderno diários estas definições.

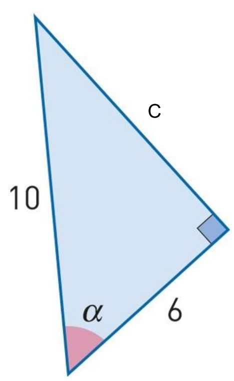
Em seguida, pede-se aos alunos a resolução do exercício 4 e 6 da página 92 e 93, respetivamente, do manual [4].
A resolução destes exercícios é efetuada pelo professor e/ou alunos no quadro.

**Praticar**

**Resolução do Exercício 4:**

**Em cada caso, determina as razões trigonométricas do ângulo $\alpha$ assinalado:**

**4.1.**




$10^2 = C^2 + 6^2$

$\Longleftrightarrow 100 = C^{2} + 36$

$\Longleftrightarrow C^{2} = 100 - 36$

$\Longleftrightarrow C^{2} = 64,\ C_1 > 0$

$C = \sqrt{64} = 8$

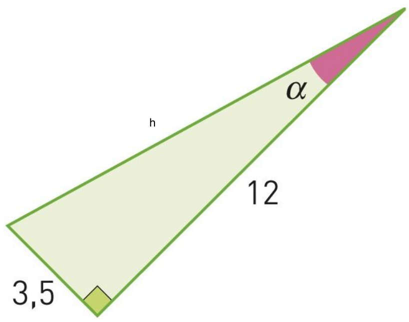
Logo as razões trigonométricas são:

$sen\ \alpha = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

$cos\ \alpha = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$

$tg\ \alpha = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

**4.2.**




$h^{2} = 3,5^{2} + 12^{2}$

$\Longleftrightarrow h^{2} = 12,25 + 144$

$\Longleftrightarrow h^{2} = 156,25,\ h > 0$

$h = \sqrt{156,25} = 12,5$

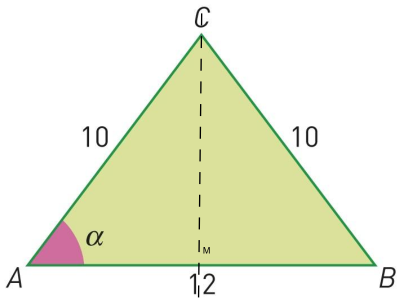
Logo as razões trigonométricas são:

$sen\ \alpha = \dfrac{3,5}{12,5} = \dfrac{7}{25}$

$cos\ \alpha = \dfrac{12}{12,5} = \dfrac{24}{25}$

$tg\ \alpha = \dfrac{3,5}{12} = \dfrac{7}{24}$

**Resolução do Exercício 6:**




**6.1.**$cos\ \alpha$

$cos\ \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

**6.2.**$tg\ \alpha$

$tg\ \alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

**6.3.**$sen\ \alpha$

$sen\ \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

---

O professor verifica se existem dúvidas.

Por fim, é proposto o exercício 7 da página 93 do manual [4] para trabalho de casa.

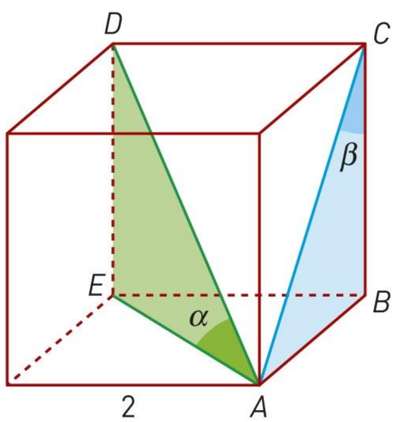
**Trabalho de casa**

- Exercício 7 da página 93.

**Praticar**

**Resolução do Exercício 7:**

**Na figura está representado um cubo de aresta 2.**



Em relação aos ângulos $\alpha$ e $\beta$ assinalados na figura, determina:

**7.1.** $tg\,\beta$

$$\overline{AC}^{\,2} = \overline{AB}^{\,2} + \overline{BC}^{\,2}$$

$$\iff \overline{AC}^{\,2} = 2^{\,2} + 2^{\,2}$$

$$\iff \overline{AC}^{\,2} = 4 + 4$$

$$\iff \overline{AC}^{\,2} = 8, \ \overline{AC} > 0$$

$$\overline{AC} = \sqrt{8}$$

$$tg\,\beta = \frac{2}{2} = 1$$

**7.2.** $sen\,\beta$

$$sen\,\beta = \frac{2}{\sqrt{8}}$$

**7.3.** $tg\,\alpha$

$$\overline{AD}^{\,2} = \overline{DE}^{\,2} + \overline{EA}^{\,2}$$

$$\iff \overline{AD}^{\,2} = 2^{\,2} + \sqrt{8}^{\,2}$$

$$\iff \overline{AD}^{\,2} = 4 + 8$$

$$\iff \overline{AD}^{\,2} = 12, \ \overline{AD} > 0$$

$$\overline{AD} = \sqrt{12}$$

$$tg\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{8}}$$

**7.4.** $cos\,\alpha$

$$cos\,\alpha = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{8}{12}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

---

### Avaliação

- participação nas atividades propostas;
- cooperação com os colegas e professor;
- aplicação dos conhecimentos matemáticos;
- raciocínio matemático;
- comunicação matemática;
- uso da terminologia e da simbologia adequada;

- comportamento na sala de aula.

**Referências**
[4], [3]

### 3.3.6 Planificação 6

---

**Unidade Didática:** Trigonometria

---

**Aula nº** 141 **Data** 15 de maio de 2014
**Ano|Turma:**9ºB
**Duração da Aula:** 45 minutos

---

**Tópico:**
Razões trigonométricas num triângulo retângulo.

**Sumário:**
Resolução de exercícios sobre razões trigonométricas de ângulos agudos.

**Pré-requisitos:**
- Noção de ângulo agudo, amplitude de um ângulo e de triângulo retângulo;
- Identificar as razões trigonométricas de ângulos agudos de um triângulo retângulo;
- Identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo dado como razões obtidas a partir de elementos de um triângulo retângulo.

**Objetivos:**
No final da aula, os alunos devem saber:

- Relacionar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo dado como razões obtidas a partir de elementos de um triângulo retângulo;
- Resolver exercícios utilizando razões trigonométricas em contextos variados.

**Competências Transversais:**
Nesta aula é possível desenvolver a Comunicação Matemática oral e o Raciocínio Matemático nas possíveis discussões geradas em torno da matéria a lecionar, como também através dos exercícios a resolver.

**Materiais e Recursos**
- Manual adotado: Novo Espaço Parte 2 - Matemática 9º Ano [4]
- Quadro Branco
- Marcadores: preto, azul, vermelho
- Quadro interativo
- Vídeo projetor
- Computador
- Ficheiro *FT_trigonometria.pdf*

**Notas:**

▷ As indicações Praticar ____ referenciam os exercícios que o professor deve resolver.

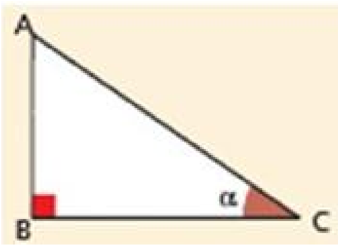
**Desenvolvimento da aula/Estratégias:**
Inicia-se a aula escrevendo o sumário no quadro.

De seguida, o professor distribui uma ficha de trabalho aos alunos, FT_trigonometria.pdf.
A resolução é iniciada logo após que o professor termine a distribuição a ficha de trabalho. A resolução é efetuada no quadro pelo professor e/ou alunos.

**Praticar**

**Resolução da ficha de Trabalho: Razões trigonométricas num triângulo retângulo**

1. **Considera o triângulo retângulo** $[ABC]$.

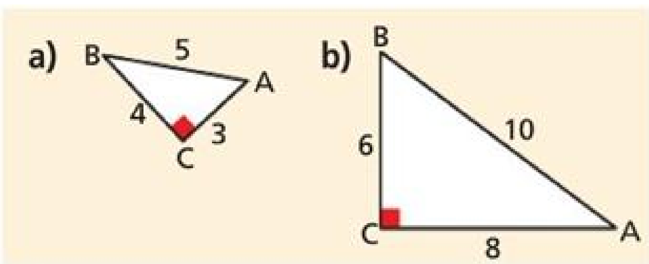



Qual das seguintes opções representa o cateto oposto, o cateto adjacente e a hipotenusa do triângulo [ABC] relativamente ao ângulo de amplitude $\alpha$?

$(A)$ $[AB]$ é o cateto adjacente, $[BC]$ é o cateto oposto e $[AC]$ é a hipotenusa.
$(B)$ $[AB]$ é a hipotenusa, $[BC]$ é o cateto adjacente e $[AC]$ é o cateto oposto.
$(C)$ $[AB]$ é o cateto oposto, $[BC]$ é o cateto adjacente e $[AC]$ é a hipotenusa.
$(D)$ $[AB]$ é o cateto oposto, $[BC]$ é a hipotenusa e $[AC]$ é o cateto adjacente.

A resposta correta é a alínea $(C)$.

2. **Calcula os valores de** $sen$ **,** $cos$ **e** $tg$ **em cada um dos triângulos retângulos.**



**Alínea a)**

$sen\ = \frac{4}{5}$

$cos\ = \frac{3}{5}$

$tg\ = \frac{4}{3}$

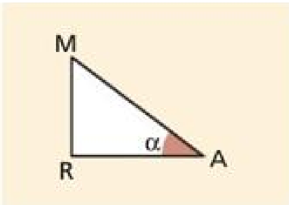
**Alínea b)**

$sen\ = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$cos\ = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$tg\ = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

3.**Completa:**



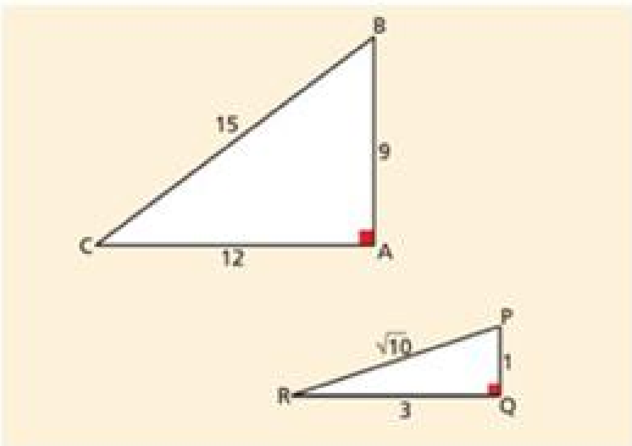

**3.1**

$sen\,\alpha = \frac{\overline{\mathbf{MR}}}{\overline{MA}}$

**3.2**

$\overline{\mathbf{MR}} = \overline{MA} \times \ sen\,\alpha$

4. **Considera os seguintes triângulos retângulos.**




**4.1 Determina**

**alínea a)** $cos\,\hat{B}$, $tg\,\hat{B}$, $cos\,\hat{C}$, $sen\,\hat{C}$

$$cos\,\hat{B} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$tg\,\hat{B} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$cos\,\hat{C} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$sen\,\hat{C} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

**alínea b)** $tg\,\hat{P}$, $tg\,\hat{R}$, $sen\,\hat{P}$, $cos\,\hat{P}$

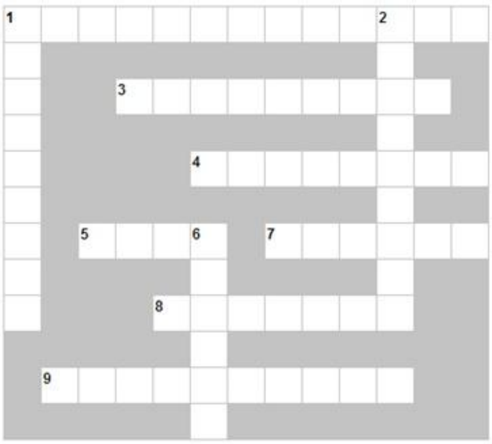
$$tg\,\hat{P} = \frac{3}{1} = 3$$

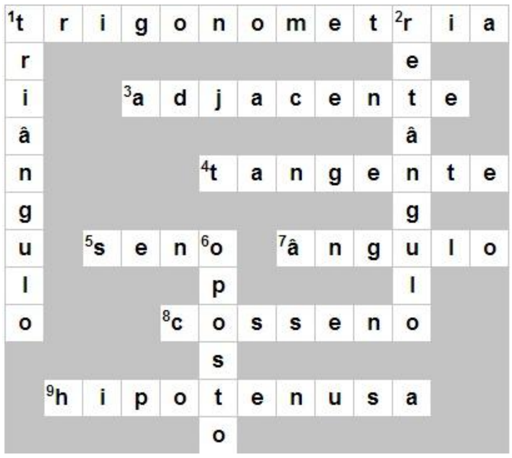
$$tg\,\hat{R} = \frac{1}{3}$$

$$sen\,\hat{P} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$cos\,\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

**5. Completa:**

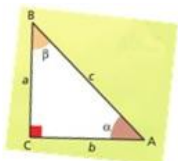




**Horizontal:**

**1-**Ciência que permite estabelecer relações entre os lados e os ângulos dos triângulos retângulos.

**3-**Designação do cateto de medida a em relação ao ângulo $\beta$.

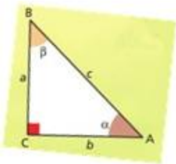



**4-**Razão entre o comprimento do cateto oposto a um ângulo agudo $\alpha$ e o comprimento do cateto adjacente a esse ângulo.

**5-**Razão entre o comprimento do cateto oposto a um ângulo agudo $\alpha$ e o comprimento da hipotenusa.

**7-**Conjunto de pontos do plano limitado por duas semirretas com a mesma origem.
**8-**Razão entre o comprimento do cateto adjacente a um ângulo agudo $\alpha$ e o comprimento da hipotenusa.
**9-**'Em qualquer triângulo retângulo o quadrado do comprimento da ... é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.'
**Vertical:**

**1-**Polígono com menor número de lados.
**2-**As razões trigonométricas só podem ser utilizadas num triângulo ...
**6-**Como se designa o cateto de medida b em relação ao ângulo $\beta$.




---

O professor verifica se existem dúvidas.

## 3.4 Avaliação

- participação nas atividades propostas;
- cooperação com os colegas e professor;
- aplicação dos conhecimentos matemáticos;
- raciocínio matemático;
- comunicação matemática;
- uso da terminologia e da simbologia adequada;
- comportamento na sala de aula.

**Referências**
[4], [3]

## 3.5 Considerações finais

O estágio pedagógico possibilita um leque de aprendizagens essenciais e fundamentais na formação de um professor, impossíveis de se obter "através dos livros". Também contribui para a aprendizagem da prática do ensino, da relação com os alunos, da interação com os colegas e membros da comunidade educativa, representa uma etapa fundamental no desenvolvimento profissional de um futuro professor.

O estágio pedagógico foi uma experiência enriquecedora, que me permitiu não só adquirir novas competências, como também melhorar aptidões essenciais para exercer a profissão de docente.

No que respeita à prática letiva, foi no decorrer destas nove aulas que foi possível a discussão sobre como trabalhar com os conteúdos e como interagir com os alunos. No final de cada aula lecionada reuni com a(s) orientador(as) para ouvir a sua opinião sobre a aula. As críticas feitas pela(s) orientador(as), foram sempre uma mais-valia para o meu crescimento e evolução profissional, enquanto futura professora.

Aquando da lecionação das aulas, foi necessário fazer algumas decisões de ajustamento pontuais. A gestão do tempo de aula, é dos aspetos fundamentais para o sucesso da mesma e encontra-se dependente de inúmeros fatores, nomeadamente das características da turma, dos alunos e das atividades a desenvolver em cada aula. A planificação de cada aula não pode, nem deve ser estática, mas sim maleável de modo a permitir ao professor inserir novos elementos, mediante as observações pertinentes dos alunos e/ou situações que ocorrem dentro da sala de aula.

Outro aspeto positivo do estágio tem a ver com a possibilidade de ter presenciado aulas em duas turmas com faixas etárias tão distintas, o 9º e o 12º ano. A diferença de comportamentos e a importância que o professor tem de dar às atitudes, postura e comportamento dos alunos não têm semelhança entre si. Constituem duas experiências bastante diferentes e enriquecedoras, que testam ao máximo a capacidade do professor em gerir a pequena indisciplina e em estimular o trabalho.

Deve-se ter noção que no decorrer da prática letiva existirão sempre aspetos menos positivos que devem ser melhorador e corrigidos. Bem como a forma de planificar os conteúdos deverá ser variada tendo sempre em vista o sucesso do aluno. Uma autoanálise, uma autorreflexão e uma autoavaliação da prática letiva é fundamental e essencial para nos tornarmos profissionais de excelência.
Como em qualquer profissão, o professor tem que encarar a sua, como um processo de aprendizagem permanente e constante. O professor tem de estar apto a adaptar-se às exigências e alterações do sistema educativo, e à realidade dos alunos que tem presentes na sua sala de aula.

A minha formação não termina aqui, muito pelo contrário, haverá sempre algo mais a aprender, a melhorar e a alterar ao longo da carreira de docente.

# Bibliografia


[1] Araújo, P. (1998). *Curso de Geometria*. Gradiva.

[2] Boyer, C. B. (1996). *História da Matemática*. Editora Edgard Blücher Ltda. 3, 4, 5, 7

[3] Conceição, A. & Almeida, M. (2012). *Infinito Matemática A 9º ano*. Areal Editores, S.A. 76, 80

[4] Costa, B. & Rodrigues, E. (2012). *Novo Espaço Parte 2. Matemática 9º ano*. Porto: Porto Editora. 48, 50, 51, 53, 54, 68, 69, 72, 74, 76, 80

[5] Costa, D. S. *Astronomia e Trigonometria: as cordas de Ptolomeu*. Disponível em: https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22008/DanieldosSantosCosta.pdf. Acedido em: 10 de janeiro 2014. 5, 14

[6] Costa, N. M. L. *A história da Trigonometria*. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/mod3_pdf/historia_triogono.pdf. Acedido em: 11 de janeiro 2014. 3, 4, 5, 6

[7] Duarte, P., Peixe, T. & Caissotti, T. (2013). *Gazeta da Matemática nº169*, p 17 - 22 xiii, 24

[8] Gabinete de Avaliação Educacional do Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Matemática A - Questões de exames nacionais e de testes intermédios do 12ºano (1997-2012) - Volume III*. Ministério da Educação e Ciência. 9, 59, 63, 67

[9] Gilsdorf, M. (2006) *A comparison of Rational and Classical Trigonometry*. Disponível em: http://web.maths.unsw.edu.au/ norman/papers/TrigComparison.pdf. Acedido em: 30 de maio de 2014. 43

[10] Jorge, A. M., Alves, C. B., Fonseca, G., & Barbedo, J. (2006). *Infinito Matemática A 11º ano - Parte 2*. Areal Editores, S.A. 6, 59, 63

[11] Killgrove, R. B. & Koster, D. W. (1991). *Magazine - Mathematical Association of America nº2, vol.64*, p 109 - 114

[12] Lima, E. L., Carvalho, P. C., Wagner, E. & Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do ensino médio - Volume 1*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

[13] Marques, M. & Ferreira, P. (2012). *Projeto Desafios Matemática 9º ano - Volume 2*. Santillana Constância. 54

[14] Ministério da Educação (1991). {Plano de Organização do ensino-aprendizagem 20, 21

. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

[15] Nadson, J. L. (2013) *A aprendizagem significativa em trigonometria sob o ponto de vista de quem ensina e de quem aprende*. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/798/13. Acedido em: 10 de janeiro de 2014. 3

[16] NCTM(2008). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. Lisboa:APM. 21, 22

[17] Neves, E. (2007). *Episódios da História da Matemática para o Ensino*, Departamento de Matemática, FCUL.

[18] Ponte, J. P., Guimarães, H.M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E.G. & Oliveira, R.P.A. (2007) *Novo Programa da Matemática do Ensino Básico. Programa ME-DGIC* 20, 21, 22

[19] *Rational Zero Theorem.* Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/RationalZeroTheorem.html. Acedido em: 30 de abril de 2014.

[20] Santos, V. *Lei do cosseno e lei do seno* Disponível em: http://waldexifba.wordpress.com/material-de-apoio/ensino-medio/trigonometria/lei-dos-senos-e-cossenos/. Acedido em: 18 de novembro de 2014. xiii, 18, 19

[21] Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C. & Lopes, I. M. C. (2002) *Matemática A - 10º Ano, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Programa ME-DGIC* 21

[22] Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C. & Lopes, I. M. C. (2002) *Matemática A - 11º Ano, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Programa ME-DGIC*

[23] Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C. & Lopes, I. M. C. (2002) *Matemática A - 12º Ano, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Programa ME-DGIC*

[24] Silva, L.J. (2013) *Trigonometria Racional: uma nova abordagem para o ensino de trigonometria* Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/308/2011_00171_LUIZ_JOSE_DA_SILVA.pdf?sequence=1. Acedido em:30 de maio de2014. 35

[25] Viegas, C., Gomes, F. & Lima, Y. (2012). *Xeqmat12 Matemática A 12º ano - Volume 3.* Texto Editores, Lda. 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 67

[26] Wildberger, N.J. *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry -Chapter 1.* Disponível em: http://wildegg.com/papers/Chapter1.pdf. Acedido: 30 de maio de 2014. 37, 40

[27] Wildberger, N.J. *Survivor: the Trigonometry Challenge.* Disponível em: http://web.maths.unsw.edu.au/ norman/papers/Survivor.pdf. Acedido em: 30 de maio de 2014. 37, 39, 40

# Apêndice A

# Anexos

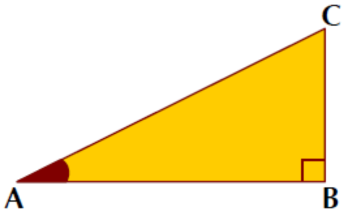
## A.1 Planificação 2

### A.1.1 Apresentação Eletrónica usada na planificação 2

# Trigonometria

## Revisões 11ºano

## Razões Trigonométricas num triângulo retângulo




$$sen\ \hat{A} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

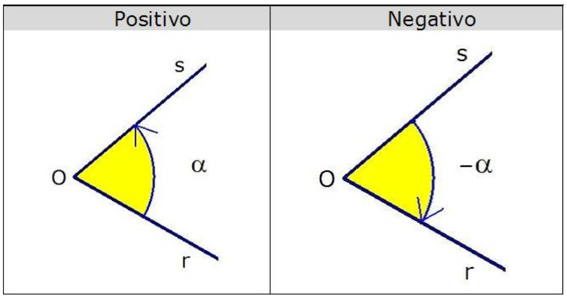
$$\cos\ \hat{A} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$tg\ \hat{A} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$$

2

## Ângulo de sentido positivo e de sentido negativo

Para interpretar movimentos de rotação há necessidade de considerar dois sentidos opostos para o ângulo: o sentido do movimento dos ponteiros do relógio (sentido negativo ou sentido retrógrado) e o sentido contrário sentido positivo ou sentido direto).

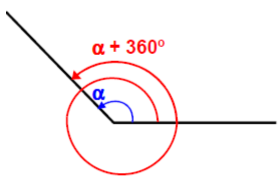


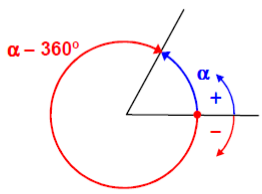



## Ângulo e arco generalizado

Se **α** é a amplitude de um ângulo (ou arco), todo os ângulos com o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade são da forma:

$$\alpha + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$



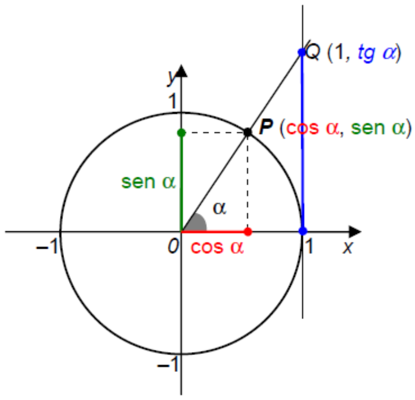
## Definição de seno, cosseno e tangente num círculo trigonométrico

( Círculo de centro na origem e raio 1)

$$sen\ \alpha = \frac{ordenada\ de\ P}{\overline{OP}}$$

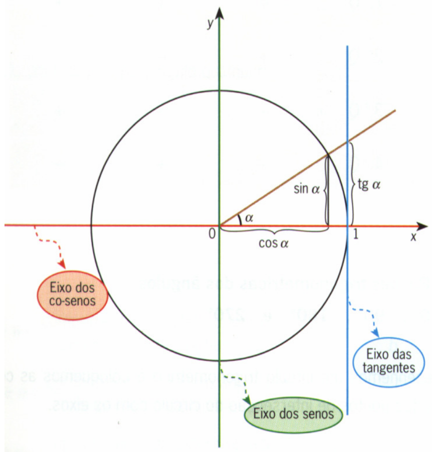
$$\cos\ \alpha = \frac{abcissa\ de\ P}{\overline{OP}}$$

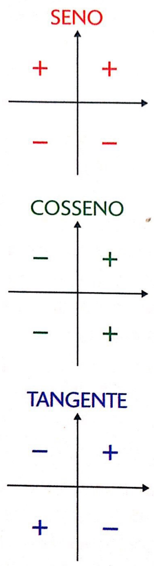
$$tg\ \alpha = \frac{ordenada\ de\ P}{abcissa\ de\ P}$$




5

## Sinal das razões trigonométricas




6

## Relações entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo

As fórmulas seguintes são válidas para qualquer amplitude de ângulo (que dê significado às expressões)

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

← **Fórmula fundamental da trigonometria**

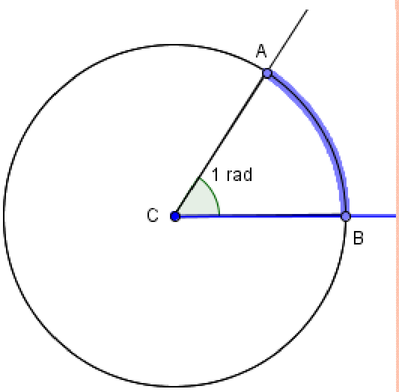
$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}$$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

7

## O Radiano

- **Radiano** é a amplitude de um arco de circunferência cujo comprimento é igual ao raio da circunferência.
- Na figura, o **arco AB** tem comprimento **igual ao raio CB**. Por isso, a amplitude do arco AB é 1 radiano.
- O **ângulo ao centro** correspondente tem **amplitude igual à do arco**. Assim, a sua amplitude é também 1 radiano.

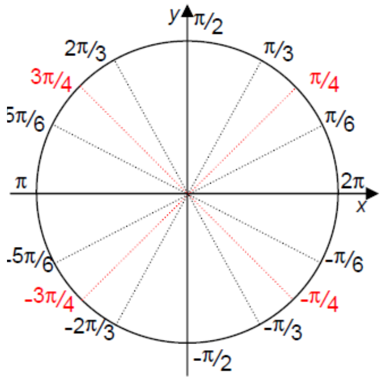



8

## Valores exatos de razões trigonométricas

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

| α | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| seno | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| co-seno | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| tangente | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | *nd* |



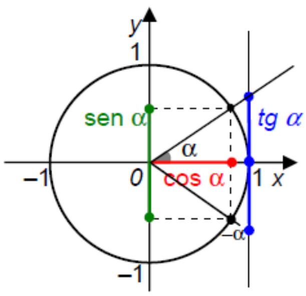

9

## Relações entre as razões trigonométricas de ângulos simétricos: α e -α

$$sen\left(-\alpha\right) = -sen\ \alpha$$

$$\cos\left(-\alpha\right) = \cos\ \alpha$$

$$tg\left(-\alpha\right) = -tg\ \alpha$$



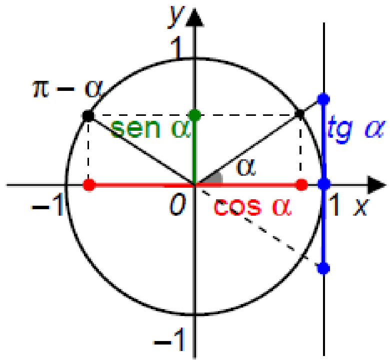

10

## Relações entre as razões trigonométricas de ângulos suplementares: α e π-α

$$sen(\pi-\alpha)=sen\ \alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$tg(\pi-\alpha)=-tg\ \alpha$$



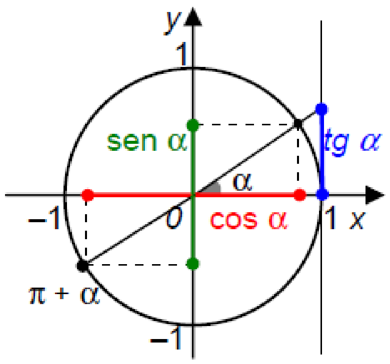

11

## Relações entre as razões trigonométricas de ângulos que diferem de π: α e π+α

$$sen(\pi+\alpha)=-sen\ \alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

$$tg(\pi+\alpha)=tg\ \alpha$$



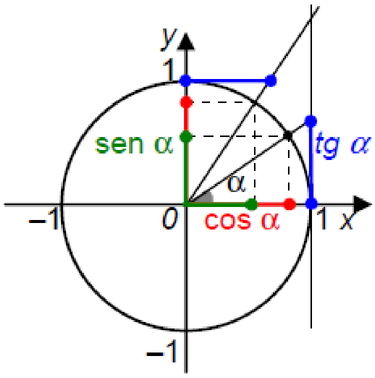

12

## Relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares: α e $\frac{\pi}{2}-\alpha$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sen\,\alpha$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{tg\,\alpha}$$



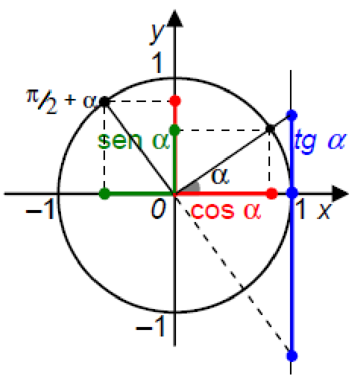

13

## Relações entre as razões trigonométricas de ângulos que diferem de $\frac{\pi}{2}$: α e $\frac{\pi}{2}+\alpha$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-sen\,\alpha$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{tg\,\alpha}$$



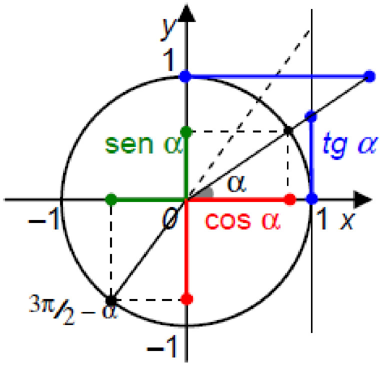

14

## Relações entre as razões trigonométricas de ângulos que diferem α e $\frac{3\pi}{2}-\alpha$

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-sen\,\alpha$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{tg\,\alpha}$$



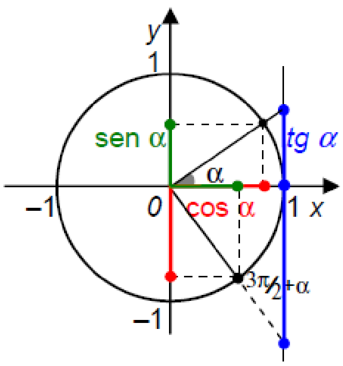

15

## Relações entre as razões trigonométricas de ângulos que diferem $\frac{3\pi}{2}$

$$sen\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=sen\,\alpha$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{1}{tg\,\alpha}$$




16

## Equações trigonométricas

$$sen\ x = sen\ \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \vee x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$tg\ x = tg\ \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

17

### A.1.2 Ficha de Trabalho e Resolução

**Ficha de trabalho 4:** Revisões | **12ºano**
**ASSUNTO:** TRIGONOMETRIA | **2013/2014**

1. Na figura 1 está representado um triângulo retângulo [ABC], cuja hipotenusa mede 2 m.

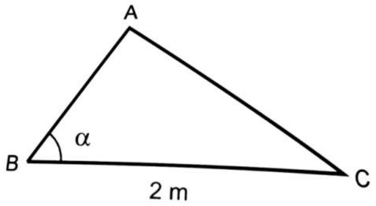



Figura 1

Qual das expressões seguintes dá a área (em m²) do triângulo [ABC], em função da amplitude, $\alpha$, do ângulo ABC?

(A) $2\ \text{sen}\alpha \cos\alpha$ (B) $2\ \text{sen}\alpha\ \text{tg}\alpha$ (C) $4\ \text{sen}\alpha \cos\alpha$ (D) $2\ \text{sen}\alpha\ \text{tg}\alpha$

2. Quantas são as soluções da equação $3\text{sen}\ x = 1$ que pertence ao intervalo $[0, 4\pi]$?

(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16

3. Na figura 2, está representado, num referencial o.n. $xOy$, o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- C é o ponto de coordenadas (1,0)
- os pontos D e E pertencem ao eixo $Oy$
- [AB] é um diâmetro do círculo trigonométrico
- as retas EA e BD são paralelas ao eixo $Ox$
- $\theta$ é a amplitude do ângulo COA
- $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

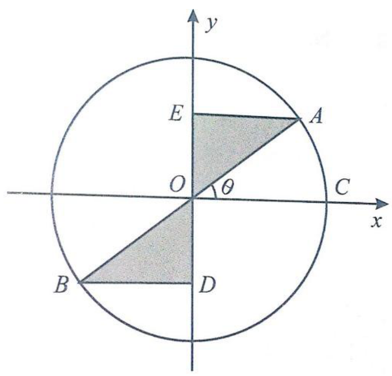



Figura 2

Qual das expressões seguintes dá o perímetro da região sombreada na figura?

(A) $2(\cos\theta + \text{sen}\ \theta)$ (B) $\cos\theta + \text{sen}\ \theta$

(C) $2(1+\cos\theta + \text{sen}\ \theta)$ (D) $1+\cos\theta + \text{sen}\ \theta$


Escola Secundária Campos Melo | Av. Vasco da Gama, 40, 6201-016 Covilhã | info@camposmelo.pt 275310880

4. Qual das expressões seguintes designa um número real positivo, para qualquer $x$ pertencente ao intervalo $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ ?

(A) $\operatorname{sen} x + \cos x$ (B) $\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$ (C) $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$ (D) $\operatorname{sen} x \times \operatorname{tg} x$

5. Na figura 3 está representado o círculo trigonométrico. Tal como a figura sugere, *O* é a origem do referencial, *Q* pertence à circunferência, *P* é o ponto de coordenadas (1,0) e *R* é o ponto de coordenadas (-1,0).

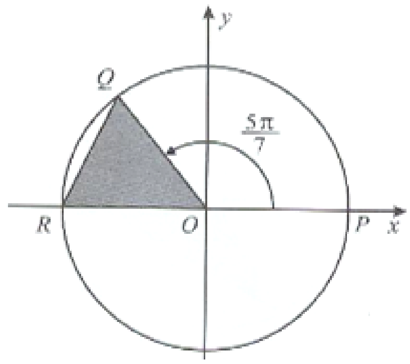



Figura 3

A amplitude, em radianos, do ângulo *POQ* é $\frac{5\pi}{7}$.

Qual é o valor, arredondado às centésimas, da área do triângulo [OQR]?

(A) 0,39 (B) 0,42 (C) 0,46 (D) 0,49

6. Na figura 4, estão representados:
   - o retângulo [ABCD], em que $\overline{DC} = 1$ e $\overline{BC} = 2$
   - o ponto *O*, ponto médio do segmento [AD]
   - uma semicircunferência de centro no ponto *O* e raio 1

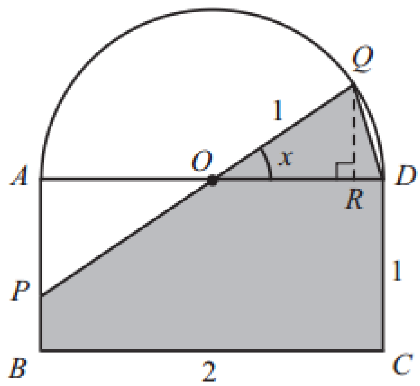



Figura 4

Considere que um ponto *P* se desloca ao longo do segmento de reta [AB], nunca coincidindo com *A*, mas podendo coincidir com *B*.
Para cada posição do ponto *P*, seja *Q* o ponto de intersecção da reta PO com a semicircunferência.

Seja $x$ a amplitude, em radianos, do ângulo DOQ $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$

Resolva os dois itens seguintes **sem recorrer à calculadora.**

6.1. Mostre que a área do polígono [BCDQP], representado a sombreado, é dada, em função de $x$, por $2 - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2}$

6.2. Para uma certa posição do ponto *P*, tem-se $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{5}$. Determine, para essa posição do ponto *P*, a área do polígono [BCDQP].
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

**Resolução da Ficha de Trabalho** **12ºano**
**ASSUNTO:** TRIGONOMETRIA **2013/2014**

**1. Resolução:**

$$A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2} \Leftrightarrow A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2}$$

Usando as razões trigonométricas, tem-se que:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\cos\alpha$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\overline{AC}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2\,\text{sen}\,\alpha$$

Assim,

$$A_{[ABC]} = \frac{2\cos\alpha \times 2\,\text{sen}\,\alpha}{2} = \frac{4\cos\alpha \times \text{sen}\,\alpha}{2} = 2\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha$$

**Resposta (A)**

**2. Resolução:**

$$3\,\text{sen}\,x = 1 \Leftrightarrow \text{sen}\,x = \frac{1}{3}$$

$$\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 19{,}47°$$

$$x = 19{,}47° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z} \ \vee\ x = (180° - 19{,}47°) + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Para k=0

$$x = 19{,}47° \quad \vee \quad x = 160{,}53°$$

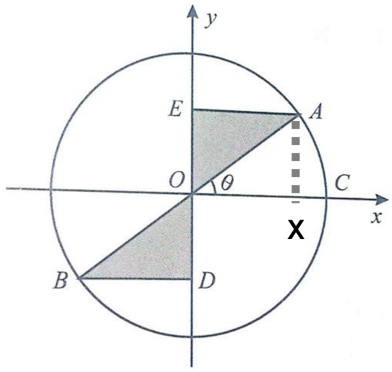
Para k=1

$$x = 19{,}47° + 360° \quad \vee \quad x = 160{,}53° + 360°$$
$$\Leftrightarrow x = 379{,}47° \quad \vee \quad x = 520{,}53°$$

**Resposta (A)**

**3. Resolução:**

$$P_{[OAE]} + P_{[ODB]} = \overline{OA} + \overline{AE} + \overline{EO} + \overline{OD} + \overline{DB} + \overline{BO}$$




Usando as razões trigonométricas, tem-se que:

$$\cos\theta = \frac{\overline{OX}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\theta = \overline{OX}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\overline{AX}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \text{sen}\,\theta = \overline{AX}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P_{[OAE]} + P_{[ODB]} &= \overline{OA} + \overline{AE} + \overline{EO} + \overline{OD} + \overline{DB} + \overline{BO} \\ &= 1 + \cos\theta + \text{sen}\,\theta + \text{sen}\,\theta + \cos\theta + 1 \\ &= 2 \times (1 + \cos\theta + \text{sen}\,\theta) \end{aligned}$$

**Resposta (C)**

**4. Resolução:**

Seja $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ tem-se que $\text{sen}\,x < 0, \quad \cos x < 0 \quad \text{e} \quad \text{tg}\,x > 0$.

Assim:

- $\text{sen}\,x + \cos x < 0$
- $\frac{\cos x}{\text{tg}\,x} < 0$
- $\text{tg}\,x - \text{sen}\,x > 0$
- $\text{sen}\,x \times \text{tg}\,x < 0$

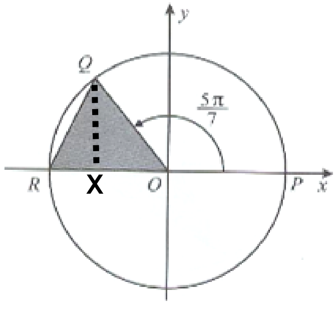
Logo apenas a expressão $\text{tg}\,x - \text{sen}\,x$ designa em número real positivo, para qualquer $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

**Resposta (C)**

**5.**

Tem-se que:

$$\alpha = \pi - \frac{5\pi}{7} = \frac{7\pi - 5\pi}{7} = \frac{2\pi}{7}$$



A área do triângulo [OAP] é dada por:

$$A_{[OQR]} = \frac{\overline{RO} \times \overline{QX}}{2}$$ , tem-se que: $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{7} = \frac{\overline{QX}}{1} \Leftrightarrow \overline{QX} = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{7}$

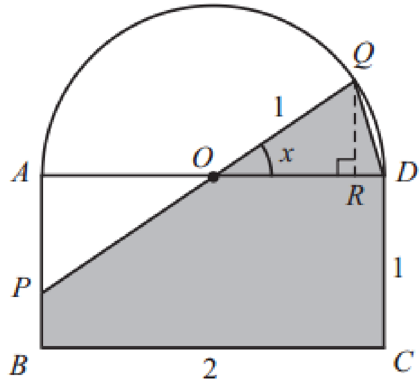
Logo,

$$A_{[ODQ]} = \frac{\overline{OR} \times \overline{QX}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{sen} \frac{2\pi}{7}}{2} \approx 0{,}39$$

**Resposta (A)**

**6. Resolução:**

**6.1.**




A área do polígono [BCDQP] é igual à soma da área do triângulo [ODQ] com a área do pentágono [ODCBP]

$$A_{[BCDQP]} = A_{[ODQ]} + A_{[ODCBP]}$$

A área do triângulo [ODQ] é dada por:

$$A_{[ODQ]} = \frac{\overline{OD} \times \overline{QR}}{2}$$ , tem-se: $\operatorname{sen} x = \frac{\overline{QR}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{QR}}{1} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \overline{QR}$, logo

$$A_{[ODQ]} = \frac{\overline{OD} \times \overline{QR}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{sen} x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

A área do pentágono [ODCBP] é igual à diferença entre a área do retângulo [ABCD] e a área do triângulo [OAP].

$$A_{[ODCBP]} = A_{[ABCD]} - A_{[OAP]}$$

A área do retângulo [ABCD] é igual a 2.

A área do triângulo [OAP] é dada por:

$$A_{[OAP]} = \frac{\overline{AO} \times \overline{AP}}{2}$$ , tem-se $\operatorname{tg} x = \frac{\overline{AP}}{\overline{AO}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \overline{AP}$ , logo

$$A_{[ODQ]} = \frac{\overline{AO} \times \overline{AP}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Assim, a área do pentágono [ODCBP] é $A_{[ODCBP]} = 2 - \frac{\text{tg } x}{2}$

Portanto a área do polígono [BCDQP] é dada por:

$$A_{[BCDQP]} = A_{[ODQ]} + A_{[ODCBP]}$$

$$\Leftrightarrow A_{[BCDQP]} = \frac{\text{sen } x}{2} + 2 - \frac{\text{tg } x}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_{[BCDQP]} = 2 - \frac{\text{tg } x}{2} + \frac{\text{sen } x}{2}$$

**6.2.** Tem-se:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow -\text{sen } x = -\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{3}{5}$$

Dado que: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, sendo $\text{sen } x = \frac{3}{5}$, tem-se que:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{4}{5}$$

Como $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$,tem-se $\cos x = \frac{4}{5}$.

Então,


Escola Secundária Campos Melo | Av. Vasco da Gama, 40, 6201-016 Covilhã | info@camposmelo.pt 275310880

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Tendo em conta a área da região sombreada é dada por:

$$2 - \frac{\text{tg } x}{2} + \frac{\text{sen } x}{2} = 2 - \frac{\frac{3}{4}}{2} + \frac{\frac{3}{5}}{2} = 2 - \frac{3}{8} + \frac{3}{10} = \frac{80 - 15 + 12}{40} = \frac{77}{40}$$

## A.2 Planificação 3

### A.2.1 Apresentação Eletrónica usada na planificação 3

# Funções seno e cosseno como funções reais de variável real

## Funções seno e cosseno como funções reais de variável real

Recorda que:

$$sen\ x = sen\ (x\ radianos)$$

$$\cos x = \cos\ (x\ radianos)$$

Podemos então considerar as funções:

$$sen: IR \to IR \qquad x \mapsto sen\ x$$

$$\cos: IR \to IR \qquad x \mapsto \cos x$$

2

Podemos então considerar as funções:

$$\text{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \text{sen}\, x \qquad\qquad \cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos x$$

Que são funções de variável real a que é usual chamar **funções trigonométricas.**

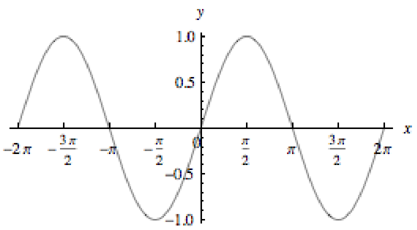
Sendo funções reais de variável real podemos desenhar os seus gráficos num referencial.



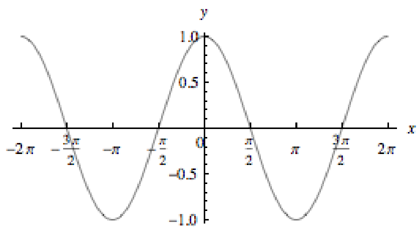


Recorrendo a uma calculadora obtemos as representações seguintes:

$y = sen\ x$




$y = \cos x$

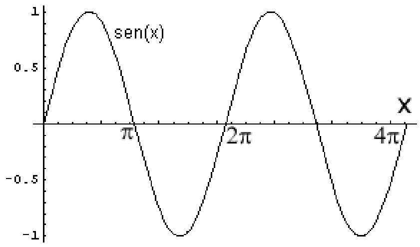


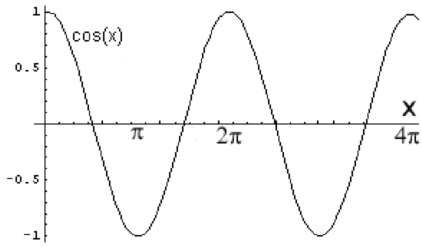
FUNÇÕES SENO E COSSENO COMO FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

É fácil perceberes que em qualquer um dos gráficos existe um "padrão" que se repete.

**Função seno e cosseno**

As funções seno e cosseno são funções periódicas, de período $2\pi$.




Repara que as características das funções seno e cosseno no intervalo $[0, 2\pi]$ mantêm-se em qualquer intervalo do tipo $[2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$

5

## FUNÇÕES PERIÓDICAS

Designa-se um fenómeno de periódico quando este fenómeno se repete após certo intervalo de tempo (período).
Se um fenómeno é periódico, podemos prever com facilidade o que ocorre num momento não observado.

Exemplos:

- movimento das marés;
- fases da lua;
- movimento de um pêndulo;
- ciclo dia e noite (rotação da terra).

6

**Definição:**

Uma função $f$ diz-se **periódica** se existe um número positivo P tal que, se

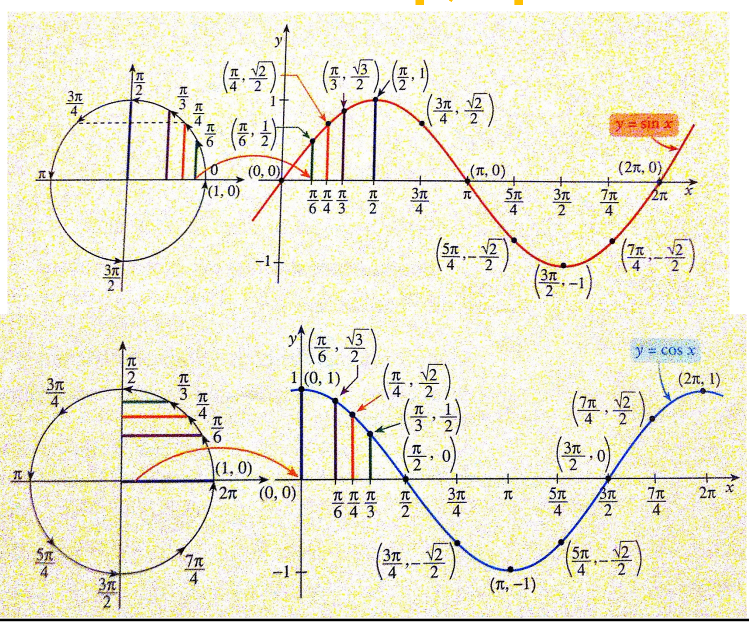
$$x \in D_f \text{, também } x + P \in D_f \text{ e } f(x+P) = f(x)$$

Dada uma função periódica $f$, chama-se período de $f$ ao menor valor positivo de $P$. Todos os outros valores de $P$ são múltiplos do período e tem-se

$$f(x + kP) = f(x) \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

7

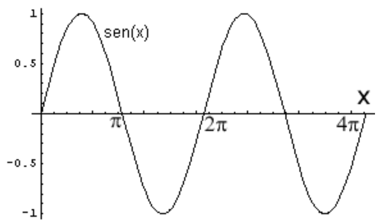
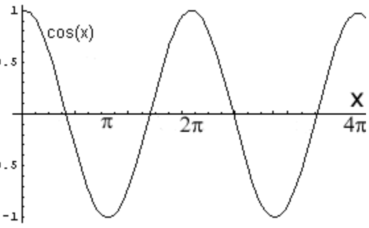
## Representação gráfica das funções seno e cosseno no intervalo [0, 2π]




8

### A.2.2 Propriedades do Seno e Cosseno

# Propriedades das funções seno e cosseno

| | FUNÇÃO SENO | FUNÇÃO COSSENO |
|---|---|---|
| **GRÁFICO** |   |   |
| **DOMÍNIO** | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| **CONTRADOMÍNIO** | [-1,1] | [-1,1] |
| **PERÍODO** | $2\pi$ | $2\pi$ |
| **CONTINUIDADE** | Função continua em $\mathbb{R}$<br>$\lim\limits_{x\to a} \text{sen } x = \text{sen } a$ | Função continua em $\mathbb{R}$<br>$\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$ |
| **LIMITE** | As funções seno e cosseno **não têm limite** quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$ | |
| **DESIGNAÇÃO** | O gráfico de cada uma das funções é uma curva que se chama **sinusoide** e **não tem assíntotas**. | |
| **PARIDADE** | A função seno é uma função **ímpar.**<br>$\text{sen } (-x) = -\text{sen } x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$<br>O gráfico é uma linha simétrica em relação à origem do referencial. | A função cosseno é uma função **par.**<br>$\cos(-x) = \cos x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$<br>O gráfico é uma linha simétrica em relação ao eixo das ordenadas. |
| **ZEROS** | $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| **SINAL** | A função seno é **positiva** nos intervalos<br>$]0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$<br>e é **negativa** nos intervalos<br>$]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$ | A função cosseno é **positiva** nos intervalos<br>$\left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$<br>e é **negativa** nos intervalos<br>$\left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$ |
| **MONOTONIA** | A função seno é **crescente** nos intervalos<br>$\left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$<br>e é **decrescente** nos intervalos<br>$\left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$ | A função cosseno é **crescente** nos intervalos<br>$]0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$<br>e é **decrescente** nos intervalos<br>$]\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi[, k \in \mathbb{Z}$ |
| **EXTREMOS** | Mínimo= -1<br>Máximo = 1<br>Minimizantes: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$<br>Maximizantes: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | Mínimo= -1<br>Máximo = 1<br>Minimizantes: $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$<br>Maximizantes: $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |

## A.3 Planificação 5

### A.3.1 Apresentação Eletrónica usada na planificação 5

# Trigonometria no triângulo retângulo

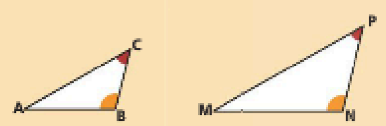
Razões trigonométricas de ângulos agudos



## CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

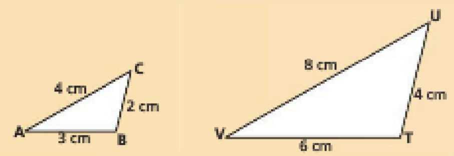
Dois triângulos que têm dois pares de ângulos correspondentes congruentes são semelhantes

**Critério AA**



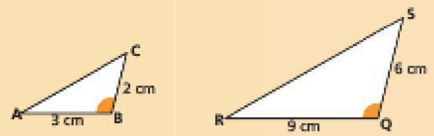

Dois triângulos que têm os comprimentos dos três lados diretamente proporcionais são semelhantes

**Critério LLL**



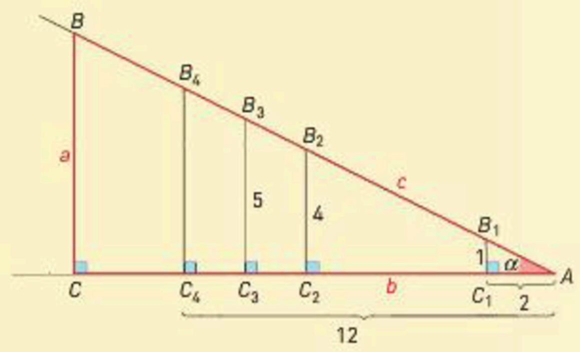

Dois triângulos que têm os comprimentos de dois pares de lados diretamente proporcionais e os ângulos por eles formados congruentes são semelhantes

**Critério LAL**



# Tarefa 2

Na figura abaixo estão representados vários triângulos retângulos.



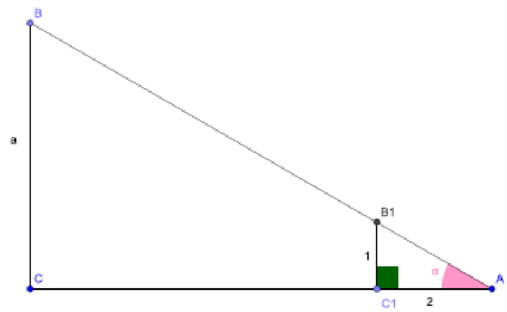

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = c$ ; $\overline{BC} = a$ ; $\overline{AC} = b$
- $\overline{AC_1} = 2$ ; $\overline{AC_4} = 12$
- $\overline{C_1B_1} = 1$ ; $\overline{C_2B_2} = 4$ ; $\overline{C_3B_3} = 5$
- O ângulo agudo que é comum a todos os triângulos é designado por $\alpha$ .



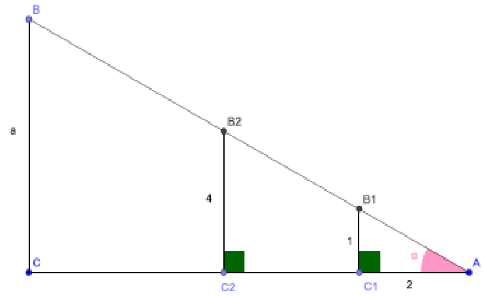
2.

2.1.




$$\overline{AB_1}^{\,2} = \overline{AC_1}^{\,2} + \overline{B_1C_1}^{\,2}$$
$$\Longleftrightarrow \overline{AB_1}^{\,2} = 2^{\,2} + 1^{\,2}$$
$$\Longleftrightarrow \overline{AB_1}^{\,2} = 4 + 1,\ \overline{AB_1} > 0$$
$$\overline{AB_1} = \sqrt{5}$$

# 2.
# 2.2.

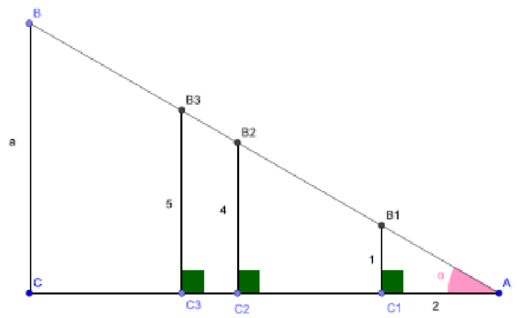



$$\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{B_1C_1}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{AC_2}}{2} = \frac{4}{1} \Longleftrightarrow \overline{AC_2} = \frac{4 \times 2}{1} \Longleftrightarrow \overline{AC_2} = 8$$

$$\frac{\overline{AB_2}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{B_1C_1}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{AB_2}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{1} \Longleftrightarrow \overline{AB_2} = 4\sqrt{5}$$



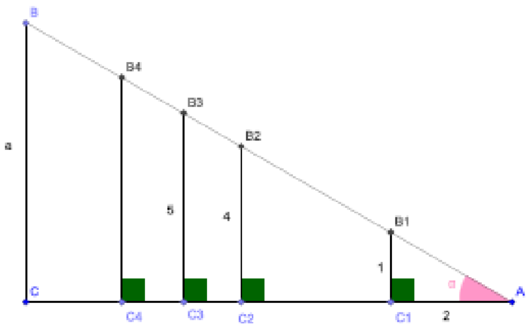
# 2.
# 2.3.




$$\frac{\overline{AC_3}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{B_1C_1}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{AC_3}}{2} = \frac{5}{1} \Longleftrightarrow \overline{AC_3} = 10$$

$$\frac{\overline{AB_3}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{B_1C_1}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{AB_3}}{\sqrt{5}} = \frac{5}{1} \Longleftrightarrow \overline{AB_3} = 5\sqrt{5}$$

# 2.
## 2.4.




$$\frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AC_4}}{\overline{AC_1}} \Leftrightarrow \frac{\overline{B_4C_4}}{1} = \frac{12}{2} \Leftrightarrow \overline{B_4C_4} = \frac{12}{2} \Leftrightarrow \overline{B_4C_4} = 6$$

$$\frac{\overline{AB_4}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC_4}}{\overline{AC_1}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB_4}}{\sqrt{5}} = \frac{12}{2} \Leftrightarrow \overline{AB_4} = \frac{12\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB_4} = 6\sqrt{5}$$



# 3.
## 3.1.

| Triângulo | Ângulo α | | |
|---|---|---|---|
| | $\frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}}$ | $\frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}}$ | $\frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}$ |
| **$AB_1C_1$** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{2}{\sqrt{5}}$ |
| **$AB_2C_2$** | $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ | $\frac{4}{4\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{8}{4\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ |
| **$AB_3C_3$** | $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{5\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{10}{5\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ |
| **$AB_4C_4$** | $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ | $\frac{6}{6\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{12}{6\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ |
| **ABC** | $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$ | $\frac{a}{c}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ | $\frac{b}{c}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ |

# 4.

## 4.1.

A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo $\alpha$ é $\frac{1}{2}$

## 4.2.

A razão entre o cateto oposto ao ângulo $\alpha$ e a hipotenusa é $\frac{1}{\sqrt{5}}$

## 4.3.

A razão entre o cateto adjacente ao ângulo $\alpha$ e a hipotenusa é $\frac{2}{\sqrt{5}}$

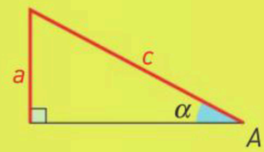


# Razões trigonométricas

- **Seno de $\alpha$** - é a razão entre a medida do comprimento do cateto oposto a $\alpha$ e a medida do comprimento da hipotenusa e representa-se por **sen $\alpha$.**

$$\textbf{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

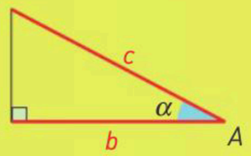
$$\textbf{sen}\,\alpha = \frac{a}{c}$$



- **Cosseno de** α - é a razão entre a medida do comprimento do cateto adjacente a α e a medida do comprimento da hipotenusa e representa-se por **cos** α**.**

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\mathbf{\cos \alpha = \frac{b}{c}}$$

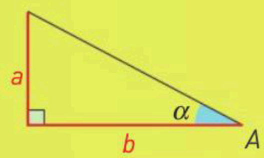





- **Tangente de** α - é a razão entre a medida do comprimento do cateto oposto a α e a medida do comprimento do cateto adjacente a α e representa-se por **tg** α**.**

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\mathbf{\text{tg}\ \alpha = \frac{a}{b}}$$

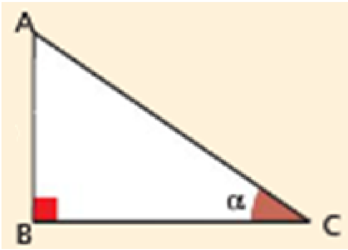


## A.4 Planificação 6

### A.4.1 Ficha de Trabalho

**Ficha de trabalho 4:** Razões trigonométricas num triângulo retângulo — **9ºano**
**ASSUNTO:** TRIGONOMETRIA — **2013/2014**

1. Considera o triângulo retângulo [ABC].




Qual das seguintes opções representa o cateto oposto, o cateto adjacente e a hipotenusa do triângulo [ABC] relativamente ao ângulo de amplitude $\alpha$ ?

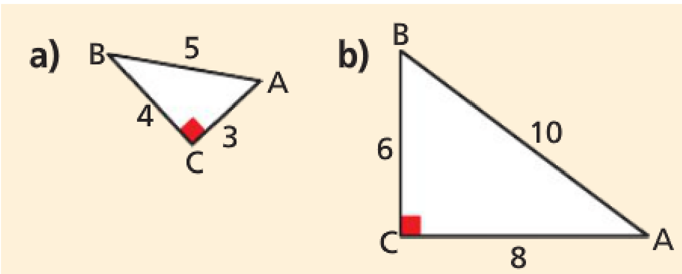
(A) [AB] é o cateto adjacente, [BC] é o cateto oposto e [AC] é a hipotenusa.

(B) [AB] é a hipotenusa, [BC] é o cateto adjacente e [AC] é o cateto oposto.

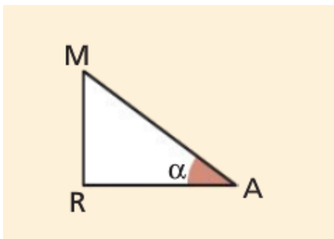
(C) [AB] é o cateto oposto, [BC] é o cateto adjacente e [AC] é a hipotenusa.

(D) [AB] é o cateto oposto, [BC] é a hipotenusa e [AC] é o cateto adjacente.

2. Calcula os valores de sen Â, cos Â e tg Â em cada um dos triângulos retângulos.



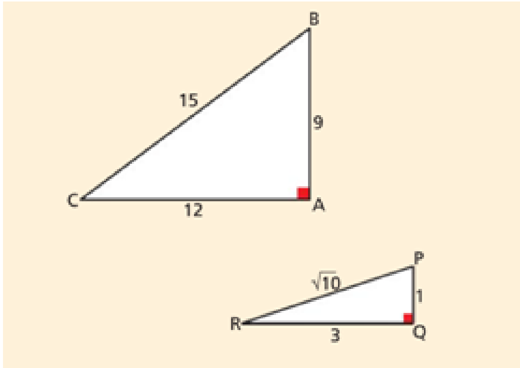

3. Completa:




3.1. $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\ldots}{\overline{MA}}$

3.2. $\ldots = \overline{MA} \times \text{sen}\,\alpha$

4. Considera os seguintes triângulos retângulos.

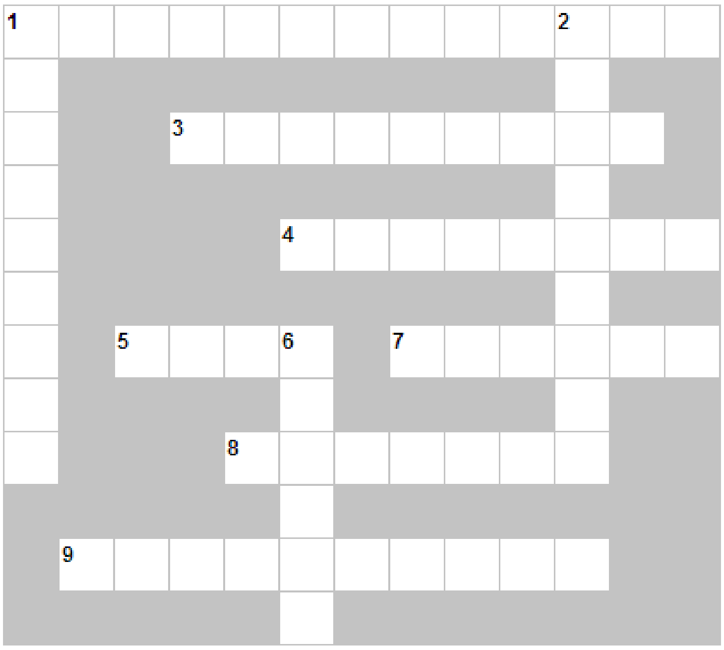



4.1. Determina:

a) $\cos \hat{B}$, $\text{tg } \hat{B}$, $\cos \hat{C}$, $\text{sen } \hat{C}$;

b) $\text{tg } \hat{P}$, $\text{tg } \hat{R}$, $\text{sen } \hat{P}$, $\cos \hat{P}$.

5.



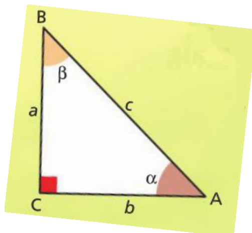




Ilustração 1

**Horizontal:**

**1-** Ciência que permite estabelecer relações entre os lados e os ângulos dos triângulos retângulos.

**3-** Designação do cateto de medida *a* em relação ao ângulo β.(Observar a ilustração 1)

**4-** Razão entre o comprimento do cateto oposto a um ângulo agudo α e o comprimento do cateto adjacente a esse ângulo.

**5-** Razão entre o comprimento do cateto oposto a um ângulo agudo α e o comprimento da hipotenusa.

**7-** Conjunto de pontos do plano limitado por duas semirretas com a mesma origem.

**8-** Razão entre o comprimento do cateto adjacente a um ângulo agudo α e o comprimento da hipotenusa.

**9-** "Em qualquer triângulo retângulo o quadrado do comprimento da ….. é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos."

**Vertical:**

**1-** Polígono com menor número de lados.

**2-** As razões trigonométricas só podem ser utilizadas num triângulo …..

**6-** Como se designa o cateto de medida *b* em relação ao ângulo β. (Observar a ilustração 1).